[redacted]

LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Höhere Mathematik

13. LEHRBRIEF

Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

02 0002 13 1

Höhere Mathematik

13. Lehrbrief

Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Verfaßt von
Dr. rer. nat. habil. Fritz R ü h s
Prof. an der Bergakademie Freiberg

Dr. rer. nat. Karl-Heinz G ä r t n e r
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
der Sektion Mathematik
an der Bergakademie Freiberg

02 0002 13 1

INHALTSVERZEICHNIS

9.4. Funktionaldeterminanten und implizite Funktionen

9.4.1. Definition und Eigenschaften der Funktionaldeterminante

In der Differential- und Integralrechnung hat man oft Ausdrücke, in denen Ableitungen oder Differentiale mit einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen auftreten, durch Einführung neuer Veränderlicher umzuformen. Dabei bedient man sich zweckmäßig der Funktionaldeterminante.

Es seien n Funktionen von n Veränderlichen gegeben:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right. \tag{9.24}$$

Sie seien in einem n-dimensionalen Bereich B definiert und mögen dort stetige partielle Ableitungen nach allen Veränderlichen besitzen. Die Determinante

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{9.25}$$

heißt die Funktionaldeterminante des Systems (9.24).

Man erhält sie, indem man der Reihe nach die Veränderliche $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ partiell nach allen n Veränderlichen $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ differenziert. Im Fall zweier Veränderlicher

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

ist also

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Neben dem System (9.24) betrachten wir das System

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_3 &= \varphi_3(u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{aligned} \tag{9.26}$$

dessen Funktionen in einem n-dimensionalen Bereich B definiert sind und dort stetige partielle Ableitungen besitzen. Falls der Punkt $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in B variiert, möge der entsprechende Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ niemals außerhalb B liegen, so daß die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als mittelbare Funktionen der $u_1, u_2, \ldots, u_n$ angesehen werden können.

Wir multiplizieren nun die Funktionaldeterminante des Systems (9.24) mit der des Systems (9.25) [vgl. 1. Lehrbrief Matrizen (1968), S. 37]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_n} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_n} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_n} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Da nach der Kettenregel für mittelbare Funktionen (9.17) [Lbf. 12, S. 30] für das allgemeine Glied dieser letzten Determinante die Beziehung

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_l} + \cdots + \frac{\partial y_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_l} = \frac{\partial y_k}{\partial u_l} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt, können wir dafür auch schreiben

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1} & \frac{\partial y_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

In abgekürzter Form läßt sich dieses Gesetz folgendermaßen angeben:

$$(9.27) \qquad \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

Für $n = 2$ lautet (9.27):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

Für $n = 1$ ist $y = f(x)$ und $x = \varphi(u)$. Somit ergibt sich die bekannte Kettenregel

$$\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{du} = \frac{dy}{du}.$$

Infolgedessen ist (9.27) eine Verallgemeinerung der Kettenregel.

Eine besonders wichtige Formel erhalten wir für den Spezialfall, daß die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ übereinstimmen, so daß das Funktionensystem (9.26) die Umkehrung von (9.24) ist (die Möglichkeit der Umkehrung wird vorausgesetzt).

Dann lautet (9.27), weil $\frac{\partial y_i}{\partial y_k} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases}$ ist,

$$(9.28) \qquad \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1$$

oder

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}.$$

Hierin erkennen wir eine Verallgemeinerung der Differentiationsregel für die Umkehrfunktion.

Eine wichtige Rolle spielen die Funktionaldeterminanten bei der Substitution von Veränderlichen in mehrfachen Integralen.

Beispiele:

1. Für die Transformationsgleichungen der Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$$

hat die Funktionaldeterminante den Wert

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

und umgekehrt für

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, r)} = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \underline{\frac{1}{r}}.$$

2. Für die Transformationsgleichungen der Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = r\cos\vartheta$$

ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & x_\vartheta & x_\varphi \\ y_r & y_\vartheta & y_\varphi \\ z_r & z_\vartheta & z_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi =$$

$$= r^2(\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\cos^2\vartheta) = \underline{r^2\sin\vartheta}$$

9.4.2. Implizite Funktionen zweier Veränderlicher

Wir nehmen an, die Werte der beiden Veränderlichen x und y seien durch eine Gleichung verknüpft, die, nachdem alle Glieder auf die linke Seite gebracht worden sind, im allgemeinen Fall die Gestalt

(9.29) $$F(x, y) = 0$$

hat. Dabei ist $F(x, y)$ eine in einem bestimmten Bereich gegebene Funktion zweier Veränderlicher. Entspricht jedem x (in einem gewissen Bereich) genau ein Wert y, der zusammen mit x die Gleichung (9.29) befriedigt, so wird dadurch eine eindeutige Funktion $y = f(x)$ definiert, für welche die Gleichung

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

identisch in x gilt.

So definiert beispielsweise die Gleichung

(*) $$ax + by + c = 0$$

eine implizite Funktion, die sich explizit nach y auflösen läßt:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Die Gleichung

$$(*) \qquad y - e^y + x = 0$$

läßt sich zwar nicht nach y auflösen, wohl aber nach x:

$$x = e^y - y$$

In diesem Beispiel ist jedem y-Wert ein x-Wert zugeordnet, und auf diese Weise kann man die zugehörige Kurve zeichnen (Abb. 1). Aus Abb. 1 erkennt man aber, daß Gleichung (*) doch zwei Funktionen $y = f_1(x)$ (oberer Kurvenzweig) und $y = f_2(x)$ (unterer Kurvenzweig) darstellt. Dagegen ist die Funktion

$$y - x + \ln x - \sin y = 0$$

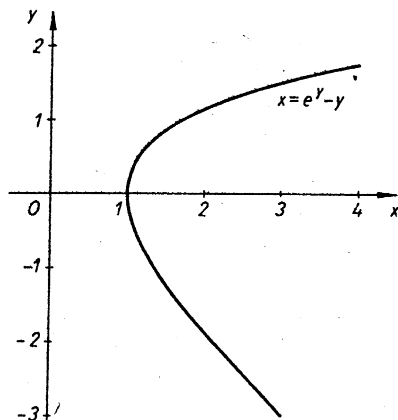


Abb. 1

weder nach x noch nach y auflösbar. In diesem Zusammenhang erklären wir —

Definition:

> *Eine Funktion wird* ***implizit*** *genannt, wenn sie durch eine nicht nach y aufgelöste Gleichung der Gestalt* (9.29) *gegeben ist. Man nennt sie* ***explizit****, wenn man die unmittelbare Abhängigkeit der Veränderlichen y von der Veränderlichen x in der Form $y = f(x)$ angibt.*

Diese Termini beziehen sich nur auf die Art und Weise der Darstellung einer Funktion, nicht auf ihre Eigenschaften. Im einfachsten Fall, wenn die Gleichung (9.29) *algebraisch* ist, d. h., wenn $F(x, y)$ ein Polynom in x und y ist, heißt die dadurch definierte implizite Funktion y von x algebraisch. Ist der Grad der Gleichung in y nicht höher als vier, so kann man die Gleichung nach y auflösen; ist der Grad höher als vier, so gelingt diese Auflösung nur in Ausnahmefällen.

Wir betrachten jetzt die Funktion $F(x, y) = 0$. Unter gewissen Bedingungen stellt diese Funktion eine Kurve in der Ebene dar. Man nennt sie dann die implizite Kurvengleichung. Das Problem besteht nun darin festzustellen, ob die Kurve (9.29) (oder Teile von ihr) durch eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x)$

beschrieben werden kann, wobei $f(x)$ eine eindeutige Funktion ist. Das bedeutet geometrisch, daß die Kurve bzw. Teile von ihr von Parallelen zur y-Achse nur in einem Punkt geschnitten werden. Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung im Funktionbegriff muß man eventuell die Variationsbereiche von x und y gewissen Einschränkungen unterwerfen.

So bedeutet die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

für beliebiges x und $y \geqq 0$ eine Funktion, die den oberen Kurvenast (Ellipsenbogen), und für beliebiges x und $y \leqq 0$ eine Funktion, die den unteren Kurvenast (Ellipsenbogen) darstellt. Die Punkte mit der Ordinate $y = 0$ gehören zu beiden Kurvenästen. Da jedoch die Tangenten beider Kurvenäste in diesen Punkten zusammenfallen, ergibt sich bei der Untersuchung keine Schwierigkeit.

9.4.3. Differentiation impliziter Funktionen zweier Veränderlicher

Bevor wir die Funktion

(9.29) $$F(x, y) = 0$$

ableiten, wollen wir uns vergewissern, unter welchen Bedingungen überhaupt eine Ableitung existiert. Dazu geben wir den folgenden Satz ohne Beweis an.

Satz:

Wenn $F(x, y)$ in einer zweidimensionalen Umgebung des Punktes $P_0(x_0, y_0)$ definiert und stetig ist, die partiellen Ableitungen F_x und F_y in dieser Umgebung existieren und stetig sind, der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ die Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ erfüllt und $F_y(x_0, y_0)$ von Null verschieden ist, so existiert eine eindeutige Funktion $y = f(x)$, die eine stetige Ableitung y' besitzt.

Zur Berechnung der Ableitung gehen wir von der Darstellung $F(x, y) = 0$ aus. Weil y wegen $y = f(x)$ von x abhängt, können wir $F(x, y)$ als mittelbare Funktion von x, $F[x, f(x)] \equiv 0$ auffassen. Differenziert man (9.29) partiell nach x (vgl. Kettenregel (9.15), Lbf. 12, S. 29), so ergibt sich

(9.30) $$F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot y' = 0,$$

woraus wegen $F_y \neq 0$

(9.31) $$\boxed{y_x = y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

folgt.

Jetzt können wir weiter schließen. Hat $F(x, y)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung, so kann der in (9.31) auf der rechten Seite stehende Ausdruck nach x differenziert werden. Dann existiert auch die Ableitung von y' nach x, d. h. y''. Führt man die Differentiation nach der Quotientenregel unter Benutzung der Kettenregel aus (die Argumente lassen wir der Einfachheit halber weg), so ergibt sich

$$y'' = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}\, y_x) F_y - (F_{yx} + F_{yy}\, y_x) F_x}{F_y^2}.$$

Ersetzen wir noch y_x durch (9.31), so erhält man

$$(9.32) \qquad \boxed{y'' = -\frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}.}$$

Entsprechend werden die Ableitungen höherer Ordnung gebildet.

9.4.4. Implizite Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen

Analog der Gleichung (9.29) kann man auch eine Gleichung in mehr als zwei Veränderlichen betrachten:

$$(9.33) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$$

Unter bestimmten Bedingungen definiert diese Gleichung eine oder mehrere implizite Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Auf die Frage, wann durch (9.33) nur eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiert ist, wollen wir hier nicht eingehen. Für die Existenz der partiellen Ableitungen ist dabei jedoch wesentlich, daß die partielle Ableitung

$$F_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ nicht verschwindet. Verstehen wir unter y die durch (9.33) definierte Funktion, so erhalten wir durch partielle Differentiation nach x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

entsprechend der Formel (9.30)

$$F_{x_i} + F_y y_{x_i} = 0$$

oder

$$(9.34) \qquad \boxed{y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

vorausgesetzt werden muß.

Beispiele:

1. Für die durch die Gleichung $F(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0$ definierte Funktion $y = f(x)$ berechne man y'!

   a) $F_x = 3x^2 - 3y^2$, $F_y = -6xy + 6y^2$

   Eingesetzt in (9.28):

$$y' = -\frac{3(x^2 - y^2)}{-6y(x - y)} = \underline{\frac{x + y}{2y}}$$

   b) Wir differenzieren $F[x, y(x)]$ direkt nach x:

$$3x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 6y^2y' = 0$$

$$-6y(x - y)y' = -3(x^2 - y^2)$$

$$\underline{y' = \frac{x + y}{2y}}$$

2. Es ist y'' der Funktion $F(x, y) = e^x \cos y$ zu bilden.

$$F_x = e^x \cos y, \qquad F_y = -e^x \sin y$$

$$F_{xx} = e^x \cos y, \; F_{xy} = -e^x \sin y, \; F_{yy} = -e^x \cos y$$

Nach (9.32):

$$y'' = -\frac{e^x \cos y \cdot e^{2x} \sin^2 y - 2(-e^x \sin y)\, e^x \cos y(-e^x \sin y) + (-e^x \cos y)\, e^{2x} \cos^2 y}{-e^{3x} \sin^3 y} =$$

$$= -\frac{e^{3x} \cos y(\sin^2 y - 2\sin^2 y - \cos^2 y)}{-e^{3x} \sin^3 y} = +\frac{\cos y(-\sin^2 y - \cos^2 y)}{\sin^3 y}$$

$$\underline{y'' = -\frac{\cos y}{\sin^3 y}}$$

3. Es ist der Anstieg der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ in ihren Schnittpunkten mit der Geraden $y = 1$ zu berechnen.

Schnittpunkte:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \qquad x^2 = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$$

$$x_1 = 2\sqrt{3}, \quad x_2 = -2\sqrt{3}$$

$$F_x = \frac{2x}{16} = \frac{x}{8}, \quad F_y = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2}, \quad y' = -\frac{\frac{x}{8}}{\frac{y}{2}} = -\frac{x}{4y}$$

$$y'(2\sqrt{3};\, 1) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \approx -0{,}866 \qquad y'(-2\sqrt{3};\, 1) = -\frac{-2\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}866$$

Im Punkt $(2\sqrt{3}; 1)$ beträgt der Anstieg $\tan\alpha_1 = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ und im Punkt $(-2\sqrt{3}; 1)$ $\tan\alpha_2 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

4. Es sind die Extremwerte der Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ zu bestimmen (vgl. Lbf. 11, Übungsaufgabe 23, Abb. 33)!

Zunächst machen wir uns den Kurvenverlauf klar. Ersetzt man x durch $-x$, so ändert sich die Funktionsgleichung nicht. Folglich ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse. Mit der gleichen Überlegung (y ersetzt man durch $-y$) stellt man fest, daß die Kurve auch symmetrisch zur x-Achse verläuft. Nun untersuchen wir, aus wieviel Kurvenästen die Lemniskate besteht, d. h., wieviel Funktionen zu ihrer Darstellung nötig sind. Wir zeigen, daß jedem Abszissenwert zwei Ordinatenwerte zukommen. Dazu setzen wir den Abszissenwert $x = c$ in die Funktionsgleichung ein:

$$(c^2 + y^2)^2 - a^2(c^2 - y^2) = 0$$

$$y^4 + (2c^2 + a^2)y^2 + c^4 - a^2c^2 = 0$$

$$y_{1,2}^2 = -\frac{2c^2 + a^2}{2} \pm \sqrt{c^4 + a^2c^2 + \frac{a^4}{4} - c^4 + a^2c^2}$$

$$y_1^2 = -\frac{2c^2 + a^2}{2} + \sqrt{2a^2c^2 + \frac{a^4}{4}}$$

$$y_2^2 = -\frac{2c^2 + a^2}{2} - \sqrt{2a^2c^2 + \frac{a^4}{4}}$$

y_2^2 ist stets negativ, folglich wird y_2 nicht reell. Die Gleichung für y_1^2 liefert genau dann reelle Ordinatenwerte, wenn die rechte Seite nicht negativ wird, d. h. wenn gilt:

$$0 \leqq -\frac{2c^2 + a^2}{2} + \sqrt{2a^2c^2 + \frac{a^4}{4}}$$

$$\left(\frac{2c^2 + a^2}{2}\right)^2 \leqq 2a^2c^2 + \frac{a^4}{4}$$

$$c^4 \leqq a^2c^2$$

$$c^2 \leqq a^2$$

Wegen $x = c \geqq 0$ heißt das aber: Wählt man $0 \leqq x \leqq a$, so existieren für jeden Abszissenwert zwei Ordinatenwerte; wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt dasselbe für $-a \leqq x \leqq 0$.

Nun folgt aber für $x = 0$ aus der Funktionsgleichung

$$y^4 + a^2y^2 = 0$$

oder

$$y^2(y^2 + a^2) = 0$$

nur die reelle Doppellösung $y = 0$, d. h., bei $x = 0$, $y = 0$ liegt ein *Doppelpunkt* oder *singulärer Punkt* vor. In der weiteren Rechnung werden wir diesen gesondert untersuchen.

Nach diesen Vorbetrachtungen bestimmen wir jetzt die Extremwerte. Die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von

(*) $$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

sind:

$$F_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - a^2 \cdot 2x = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2)$$

$$F_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + a^2 \cdot 2y = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)$$

$$F_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2, \quad F_{xy} = 8xy, \quad F_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2$$

Hieraus erhalten wir:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x(2x^2 + 2y^2 - a^2)}{y(2x^2 + 2y^2 + a^2)}$$

Für die Existenz von Extremwerten ist notwendig, daß $y' = -\frac{F_x}{F_y} = 0$ ist. Diese Bedingung ist für diejenigen Wertepaare (x, y) erfüllt, für die der Zähler verschwindet, ohne daß der Nenner gleichzeitig Null wird. Deshalb lösen wir die Gleichung

(**) $$x(2x^2 + 2y^2 - a^2) = 0.$$

Sie wird zunächst für $x_0 = 0$ erfüllt (jedoch ist für $x_0 = 0$ auch der Nenner von y' gleich Null). Aus den Voruntersuchungen wissen wir bereits, daß es sich um den singulären Punkt $(0; 0)$ handelt, was man leicht durch Einsetzen in (*) nachprüfen kann.

Aus dem zweiten Faktor von (**)

(***) $$2x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$$

folgt

$$y^2 = \frac{a^2}{2} - x^2.$$

Durch Einsetzen in (*) erhält man:

$$\left(x^2 + \frac{a^2}{2} - x^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - \frac{a^2}{2} + x^2\right) = 0$$

$$\frac{a^4}{4} - 2a^2x^2 + \frac{a^4}{2} = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{8}a^2 = \frac{6}{16}a^2$$

Setzt man $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$ bzw. $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{4} a$ in (***) ein, so ergeben sich aus

$$y^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{6}{16} a^2 = \frac{2}{16} a^2$$

vier Lösungspaare:

$$x_{11} = \frac{\sqrt{6}}{4} a,\ y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4} a;\ x_{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} a,\ y_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4} a$$

$$x_{21} = -\frac{\sqrt{6}}{4} a,\ y_{21} = \frac{\sqrt{2}}{4} a;\ x_{22} = -\frac{\sqrt{6}}{4} a,\ y_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{4} a$$

An den vier genannten Stellen ist $F_y \neq 0$. Wir führen nun noch den Nachweis, daß dort Extremwerte vorliegen. Die zweite Ableitung

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

reduziert sich wegen $F_x = 0$ auf

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2}{F_y^3} = -\frac{F_{xx}}{F_y},$$

d. h. für unseren Fall

$$y'' = -\frac{12x^2 + 4y^2 - 2a^2}{2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)}.$$

Berücksichtigt man noch $y^2 = \frac{a^2}{2} - x^2$, so folgt

$$y'' = -\frac{2x^2}{a^2 y},$$

also speziell:.

$$y''\left(\frac{\sqrt{6}}{4} a; \frac{\sqrt{2}}{4} a\right) = y''\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} a; \frac{\sqrt{2}}{4} a\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}\,a} < 0, \quad \text{Maximum}$$

$$y''\left(\frac{\sqrt{6}}{4} a; -\frac{\sqrt{2}}{4} a\right) = y''\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} a; -\frac{\sqrt{2}}{4} a\right) = \frac{3}{\sqrt{2}\,a} > 0, \quad \text{Minimum.}$$

Somit erhalten wir das folgende Ergebnis:

An den Stellen $x_{11} = \frac{\sqrt{6}}{4} a$, $y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4} a$ und $x_{21} = -\frac{\sqrt{6}}{4} a$, $y_{21} = \frac{\sqrt{2}}{4} a$ liegen Maxima und an den Stellen $x_{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} a$, $y_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4} a$ und $x_{22} = -\frac{\sqrt{6}}{4} a$, $y_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{4} a$ Minima vor.

Nun untersuchen wir noch den singulären Punkt $(x_0, y_0) = (0; 0)$. Hier nimmt y' die unbestimmte Form $y'(0; 0) = \frac{0}{0}$ an. Aus der Darstellung der Lemniskate in Polarkoordinaten $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ [Lbf. 11, Aufg. 23b, c, S. 66f.) wissen wir andererseits, daß für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ mit $r = 0$ der Ursprung erreicht wird. Deshalb benutzen wir die Darstellung in Polarkoordinaten, um festzustellen, ob die Tangente im Ursprung horizontal verläuft.

Aus $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ erhalten wir

$$r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = a\frac{2(-\sin 2\varphi)}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Damit ergibt sich für den Anstieg [vgl. Lbf. 11 (8.12), S. 8] der Lemniskate

$$y' = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{-a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi}{-a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi} =$$

$$= \frac{-\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi}{-\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi},$$

also speziell

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1\frac{\sqrt{2}}{2} + 0}{-1\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} = 1,$$

$$y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1\frac{\sqrt{2}}{2} + 0}{1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0} = -1.$$

Die Tangenten im Ursprung haben den Anstieg $\tan\alpha_1 = 1$ bzw. $\tan\alpha_2 = -1$, d. h., sie verlaufen nicht horizontal. Folglich entfällt der Punkt $(0; 0)$ bei der Extremwertuntersuchung.

5. Für die durch die Gleichung $F(x, y, z) = x^2 z \ln y - y \ln z = 0$ bestimmte Funktion $z = f(x, y)$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zu bilden.

$$F_x = 2x\, z \ln y,\quad F_y = \frac{x^2 z}{y} - \ln z,\quad F_z = x^2 \ln y - \frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x\, z \ln y}{x^2 \ln y - \frac{y}{z}} = -\underline{\frac{2x\, z^2 \ln y}{x^2 z \ln y - y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{x^2 z}{y} - \ln z}{x^2 \ln y - \frac{y}{z}} = -\underline{\frac{x^2 z^2 - y\, z \ln z}{x^2 y\, z \ln y - y^2}}$$

ÜBUNGSAUFGABEN

1. Für die Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = z$$

ist die Funktionaldeterminante zu berechnen!

2. Berechne den Wert der Funktionaldeterminante für

$$x_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,\ x_2 = y_1 y_2 y_3,\ x_3 = \ln \frac{y_1 y_3}{y_2}\,!$$

3. Berechne y' für die durch die Gleichung $F(x, y) = e^{x+y} - \ln x = 0$ bestimmte Funktion $y = f(x)$!

4. Berechne y' von der sog. Eulerschen Kurve $F(x, y) = x^y - y^x = 0$ für $x \neq y$. Welchen Anstieg hat die Kurve im Punkt $(4; 2)$?

5. Berechne y' und y'' für $F(x, y) = x - y + a \sin y = 0$!

6. Berechne y'' für $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - a^2 = 0$!

7. Berechne den Anstieg der Tangenten an die durch $x^3 + x^2 y^2 - 16 x y^3 = 16$ dargestellte Kurve in allen ihren Schnittpunkten mit der Geraden $y = 1$!

8. Wie lautet die Gleichung der Tangente an die durch

$2x^3 - x^2 y^2 - 3x + y + 7 = 0$ bestimmte Kurve im Punkte $P_0\,(1; y_0 < 0)$?

9. Wo hat die Kurve $x^3 + y^3 = 3x^2$ $(x \neq 0)$ eine horizontale Tangente? An welcher Stelle $x \neq 0$ und unter welchem Winkel wird die x-Achse geschnitten?

10. An welchen Stellen hat die Funktion $y = f(x)$, die durch die Gleichung $2x^2 + 3y^2 + 6xy + 2x + 6y + 5 = 0$, gegeben ist, Extremwerte?

11. Für das dreiachsige Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zu bilden!

12. Für das hyperbolische Paraboloid

$$2x - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$$

sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial y}$ und $\frac{\partial x}{\partial z}$ zu bilden!

9.5. Die Taylorsche Formel

9.5.1. Die Taylorsche Formel in Differentialform

Betrachtet man eine Funktion

$$u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die selbst alle von einer Veränderlichen t abhängen, so ist

$$u = \psi[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = \varphi(t).$$

Wenn die Funktion $\varphi(t)$ an der Stelle t_0 $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar ist[1]), so kann man sie nach Lehrbrief 7, (5.7), S. 8, mit Hilfe der Taylorschen Formel folgendermaßen darstellen:

(9.35)
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}[t_0 + \vartheta(t - t_0)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}$$

$$\text{für } 0 < \vartheta < 1$$

---

[1]) Noch die $(n + 1)$-te Ableitung ist stetig.

Dabei ist das Restglied in der LAGRANGEschen Form dargestellt. Setzt man (unter Berücksichtigung, daß für die unabhängige Veränderliche $\Delta t = dt$ gilt,

$$t - t_0 = \Delta t = \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \Delta\varphi(t_0),$$

so geht (9.35) wegen

$$\varphi^{(n)}(t_0) \cdot \mathrm{d}t^n = \frac{\mathrm{d}^n\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^n} \cdot \mathrm{d}t^n = \mathrm{d}^n\varphi(t_0)$$

über in

(9.36)
$$\Delta\varphi(t_0) = \mathrm{d}\varphi(t_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2\varphi(t_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n\varphi(t_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1}\varphi(t_0 + \vartheta\Delta t) \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Die TAYLORsche Formel (9.36) läßt sich auf den Fall mehrerer Veränderlicher übertragen. Sie hat zwar in der Differentialform für Funktionen mehrerer Veränderlicher dieselbe einfache Gestalt wie für Funktionen einer einzigen Veränderlichen, wird aber in der Darstellung mit partiellen Ableitungen viel komplizierter. Deshalb beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Funktionen zweier Veränderlicher.

9.5.2. Die TAYLORsche Formel für Funktionen zweier Veränderlicher

Die Funktion $z = f(x, y)$ besitze in einer Umgebung eines bestimmten Punktes (x_0, y_0) stetige Ableitungen bis zur $(n + 1)$-ten Ordnung. Sowohl der Zuwachs $\Delta x = h$ als auch $\Delta y = k$ seien so beschaffen, daß die geradlinige Verbindungsstrecke der Punkte

$$(x_0, y_0) \text{ und } (x_0 + h, y_0 + k)$$

innerhalb der betrachteten Umgebung des Punktes (x_0, y_0) verläuft (Abb. 2).

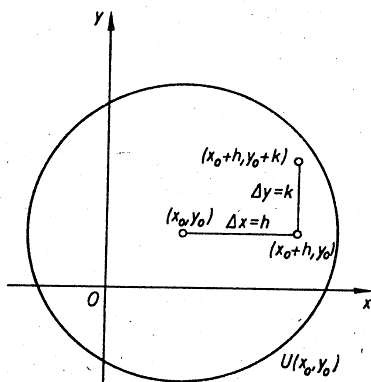


Abb. 2

Es soll gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen die Beziehung

$$(9.37)\qquad \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \mathrm{d}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < 1$$

gilt, wobei wieder für die unabhängigen Veränderlichen $\mathrm{d}x = \Delta x$ und $\mathrm{d}y = \Delta y$ ist.

Zum Beweis führen wir durch

$$x = x_0 + th,\ y = y_0 + tk \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

die neue Veränderliche t ein. Hierdurch wird geometrisch die Verbindungsstrecke der Punkte (x_0, y_0) und $(x_0 + h, y_0 + k)$ beschrieben. Setzen wir diese Werte für x und y in die Funktion $f(x, y)$ ein, so erhalten wir eine mittelbare Funktion, die nur von der einzigen Veränderlichen t abhängt:

$$(9.38)\qquad \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Für $t = 0$ und $t = 1$ erhalten wir

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0)$$

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k),$$

d. h., statt des Zuwachses aus (9.37)

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

können wir jetzt den Zuwachs

$$\Delta\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

betrachten. $\varphi(t)$ ist aber eine Funktion einer Veränderlichen, die $(n + 1)$ stetige Ableitungen besitzt und die man mit Hilfe der TAYLORschen Formel in der Differentialform

$$(9.39)\qquad \Delta\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) =$$

$$= \mathrm{d}\varphi(0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2\varphi(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n\varphi(0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1}\varphi(\vartheta) \qquad \text{für } (0 < \vartheta < 1)$$

schreiben kann. Dabei ist das rechts in verschiedenen Potenzen auftretende Differential $\mathrm{d}t$ gleich $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Wegen der Linearität der Variablensubstitution ergibt sich aus (9.38)

$$\mathrm{d}\varphi(0) = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x_0, y_0)$$

$$\mathrm{d}^2\varphi(0) = f_{xx}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f_{yy}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}^2f(x_0, y_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}^n\varphi(0) = \mathrm{d}^nf(x_0, y_0)$$

$$\mathrm{d}^{n+1}\varphi(\vartheta) = \mathrm{d}^{n+1}f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k).$$

Die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ stimmen wegen $\mathrm{d}t = 1$ mit dem Zuwachs h und k überein, denn es ist

$$\mathrm{d}x = h \cdot \mathrm{d}t = h \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = k \cdot \mathrm{d}t = k.$$

Setzen wir dies in (9.39) ein, so erhalten wir die zu beweisende Formel (9.37):

$$\Delta f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^nf(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1}f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Schreibt man statt der Differentiale die partiellen Ableitungen, so ergibt sich

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\,[f_{xx}(x_0, y_0)\,h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)h \cdot k + f_{yy}(x_0, y_0)\,k^2] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\,[f_{xxx}(x_0, y_0)\,h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)\,h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)\,hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)\,k^3] + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1}f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)}{\partial x^{n+1}}\,h^{n+1} + \binom{n+1}{1}\frac{\partial^{n+1}f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)}{\partial x^n \partial y}\,h^nk + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{\partial^{n+1}f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)}{\partial y^{n+1}}\,k^{n+1}\right]$$

$$\text{mit } 0 < \vartheta < 1.$$

Bringt man $f(x_0, y_0)$ noch auf die rechte Seite, so erkennen wir eine Erweiterung von (5.7) [Lbf. 7, S. 8] auf Funktionen von zwei Veränderlichen:

$$(9.40)\quad \boxed{\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ \frac{1}{1!}[f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k] + \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0, y_0)\,h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\,hk + f_{yy}(x_0, y_0)\,k^2] + \\ &+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(x_0, y_0)\,h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)\,h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)\,hk^2 + \\ &\qquad + f_{yyy}(x_0, y_0)\,k^3] + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ R_n, \end{aligned}}$$

wobei

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[f_{x\cdots x}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)\,h^{n+1} + \binom{n+1}{1} f_{x\cdots xy}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot h^n k + \cdots + f_{y\cdots y}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)\,k^{n+1}\right]$$

mit $0 < \vartheta < 1$ das Restglied n-ter Ordnung bedeutet.

Speziell erhält man für die Stelle $(x, y) = (0; 0)$

$$\begin{aligned} f(h, k) = f(0; 0) &+ \frac{1}{1!}[f_x(0; 0)\,h + f_y(0; 0)\,k] + \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(0; 0)\,h^2 + 2f_{xy}(0; 0)\,hk + f_{yy}(0; 0)\,k^2] + \cdots + \\ &+ \cdots + R_n. \end{aligned}$$

Ersetzt man schließlich noch sinnvoller Weise h durch x und k durch y, so erhält man die MACLAURINsche Formel, die eine Erweiterung von (5.8) [Lbf. 7, S. 9] darstellt:

$$(9.41)\quad \boxed{\begin{aligned} f(x, y) = f(0; 0) &+ \frac{1}{1!}[f_x(0; 0)\,x + f_y(0; 0)\,y] + \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(0; 0)\,x^2 + 2f_{xy}(0; 0)\,xy + f_{yy}(0; 0)\,y^2] + \\ &+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(0; 0)\,x^3 + 3f_{xxy}(0; 0)\,x^2y + 3f_{xyy}(0; 0)\,xy^2 + \\ &\qquad + f_{yyy}(0; 0)\,y^3] + \cdots + R_n \end{aligned}}$$

mit

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[f_{x\cdots x}(\vartheta x, \vartheta y)\, x^{n+1} + \binom{n+1}{1} f_{x\cdots xy}(\vartheta x, \vartheta y)\, x^n y + \cdots + \right.$$

$$\left. + f_{y\cdots y}(\vartheta x, \vartheta y)\, y^{n+1}\right]$$

Beispiele:

1. Für die Funktion $z = f(x, y) = e^x \cos y$ ist in $P_0(x_0, y_0) = P_0\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ die Taylorsche Formel aufzustellen. Unter Vernachlässigung des Restgliedes dritter Ordnung ist der Funktionswert $z(x_0 + h, y_0 + k) = z\left(0 + 0{,}2; \frac{\pi}{3} + 0{,}1\right)$ zu berechnen.

   Zunächst verschaffen wir uns alle partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung an der Stelle $P_0\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$:

$z = e^x \cos y$ $\qquad z\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$z_x = e^x \cos y$ $\qquad z_x\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$z_y = -e^x \sin y$ $\qquad z_y\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$z_{xx} = e^x \cos y$ $\qquad z_{xx}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$z_{xy} = -e^x \sin y$ $\qquad z_{xy}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$z_{yy} = -e^x \cos y$ $\qquad z_{yy}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$z_{xxx} = e^x \cos y$ $\qquad z_{xxx}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = +\frac{1}{2}$

$z_{xxy} = -e^x \sin y$ $\qquad z_{xxy}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$z_{xyy} = -e^x \cos y$ $\qquad z_{xyy}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$z_{yyy} = e^x \sin y$ $\qquad z_{yyy}\left(0; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In (9.40) eingesetzt, erhalten wir die Reihe:

$$z\left(h;\frac{\pi}{3}+k\right)=\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{1!}\left[\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}\sqrt{3}k\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2}h^2-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}hk-\frac{1}{2}k^2\right]+}$$

$$\underline{+\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{2}h^3-3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}h^2k-3\cdot\frac{1}{2}hk^2+\frac{1}{2}\sqrt{3}k^3\right]+R_3}$$

Für $h = 0{,}2$ und $k = 0{,}1$ ist der Funktionswert

$$z\left(0{,}2;\frac{\pi}{3}+0{,}1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{1!}\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 0{,}1\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}04-\sqrt{3}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}008-\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot 0{,}004-\frac{3}{2}\cdot 0{,}002+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}001\right]+R_3\approx$$

$$\approx 0{,}5+0{,}1-0{,}08661+0{,}01-0{,}01732-0{,}0025+$$

$$+0{,}00067-0{,}00173-0{,}0005+0{,}00014=\underline{0{,}50215}$$

Zum Vergleich berechnen wir noch den Funktionswert auf direktem Wege:

$$z\left(0{,}2;\frac{\pi}{3}+0{,}1\right)=e^{0{,}2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+0{,}1\right)=e^{0{,}2}\cdot\cos 1{,}1472=$$

$$=1{,}22140\cdot 0{,}41104=\underline{0{,}50204}$$

2. Für die Funktion $z = x\sin y + x^2 - y + 3$ ist die Maclaurinsche Formel bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung aufzustellen.

Die partiellen Ableitungen an der Stelle $(0; 0)$:

$z = x\sin y + x^2 - y + 3$	$z(0;0) = 3$
$z_x = \sin y + 2x$	$z_x(0;0) = 0$
$z_y = x\cos y - 1$	$z_y(0;0) = -1$
$z_{xx} = 2$	$z_{xx}(0;0) = 2$
$z_{xy} = \cos y$	$z_{xy}(0;0) = 1$
$z_{yy} = -x\sin y$	$z_{yy}(0;0) = 0$

Eingesetzt in (9.41):

$$z=f(x,y)=3+\frac{-1}{1!}y+\frac{1}{2!}\left[2x^2+2xy\right]+R_2=\underline{3-y+x^2+xy+R_2}$$

ÜBUNGSAUFGABEN

13. Für die Funktion

$$z = x^2 - y^2 + \sin x \cos y$$

ist an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{3}$ die Taylorsche Formel aufzustellen (einschließlich der Glieder 3. Ordnung)!

14. a) Für die Funktion

$$z = x \sin y + y \sin x$$

berechne man den Funktionswert an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{6}$ mit Hilfe der Taylorschen Formel (einschließlich der Glieder 3. Ordnung)!

b) Berechne $z\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}1; \frac{\pi}{6} + 0{,}2\right)$ mit Hilfe der Reihe!

c) Berechne $z\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}1; \frac{\pi}{6} + 0{,}2\right)$ direkt!

15. Für die Funktion

$$z = e^x \sinh y + e^y \cosh x$$

ist die Maclaurinsche Formel aufzustellen (einschließlich der Glieder 3. Ordnung)!

6. Extremwerte

9.6.1. Notwendige Bedingung für Extremwerte bei Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen

Zunächst machen wir uns anschaulich klar, was wir unter einem relativen Extremwert bei einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen verstehen.

Im allgemeinen ist das geometrische Bild der Funktion

$$z = f(x, y)$$

eine Fläche im Raum. Sie möge im Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein relatives Minimum haben (Abb. 3). Dann hat — in Analogie zu einem Minimum von Funktionen

einer Veränderlichen — die Fläche $z = z(x, y)$ im Punkt P_0 eine horizontale Tangentialebene Π. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ gehört zum Punkt $Q_0(x_0, y_0)$ der x,y-Ebene. Dann liegt ein Punkt $P(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + \Delta z)$, der zum Punkt $Q(x_0 + h, y_0 + k)$ aus einer Umgebung von $Q_0(x_0, y_0)$ gehört, stets höher über der x,y-Ebene als der Punkt P_0. Die Größe

(9.42) $$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

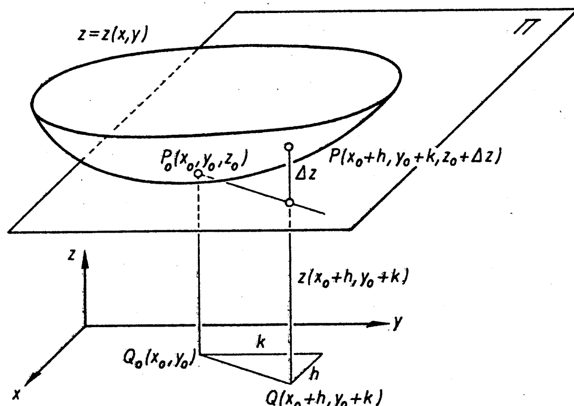


Abb. 3

muß demnach in einer gewissen Umgebung von Q_0 stets positiv sein.
Wir können kurz zusammenfassen:

Die Funktion $z = f(x, y)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) ein (relatives) Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung dieser Stelle stets

(9.43) $$\Delta z > 0$$

gilt.

Analog können wir formulieren:

Die Funktion $z = f(x,y)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) ein (relatives) Maximum, wenn in einer gewissen Umgebung dieser Stelle stets

(9.44) $$\Delta z < 0$$

ist.

Neben den relativen Maxima und Minima spricht man ähnlich wie bei Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen [vgl. 4.5.1., Lbf. 5/6, S. 11] — auch vom *absoluten Maximum* oder *Minimum* und versteht darunter den größten bzw. kleinsten Funktionswert, der im Definitionsbereich überhaupt auftritt. Folglich ist das absolute Maximum (Minimum) entweder das größte (kleinste) aller relativen Maxima (Minima) oder ein Funktionswert, der zur Berandung des Defini-

tionsbereiches gehört. Da uns in der Hauptsache die relativen Extremwerte interessieren, nennen wir diese im folgenden Text kurz Extremwerte.

Nach diesen Vorbetrachtungen stellen wir nun die notwendige Bedingung für das Vorhandensein von Extremwerten bei Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen auf.

Wir nehmen an, daß die Funktion

$$z = f(x, y)$$

an der Stelle $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein relatives Minimum (Maximum) hat. Dann liegt die Tangentialebene in diesem tiefsten (höchsten) Punkt eines Flächenstückes horizontal. Wenn das der Fall ist, liegen auch alle Tangenten an diesen Flächenpunkt — denn diese spannen bekanntlich die Tangentialebene auf — parallel zur x,y-Ebene. Insbesondere gilt das auch für die Tangenten in x-Richtung und y-Richtung. Nach 9.2.1. [Lbf. 12, S. 20ff.] ist dann aber

$$z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{9.45}$$

Beide Bedingungen sind für das Vorhandensein von Extremwerten notwendig, aber nicht hinreichend, wie man sich leicht am Beispiel $z = x \cdot y$ klarmachen kann. Im Punkt (0; 0) verschwinden zwar die partiellen Ableitungen $z_x = y$ und $z_y = x$, jedoch gibt es in jeder Umgebung dieses Punktes sowohl positive als auch negative Funktionswerte. Folglich gilt:

Nur an solchen Stellen, wo die beiden partiellen Ableitungen verschwinden, sind überhaupt Extremwerte möglich. Deshalb benutzen wir die Gleichungen (9.45) dazu, um die Stellen der x,y-Ebene aufzufinden, an denen Extremwerte vorkommen können.

Bei der praktischen Rechnung bildet man zuerst die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung. Durch Nullsetzen dieser beiden Ableitungen erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten x und y, das von einem oder mehreren Wertepaaren (x_i, y_i) erfüllt wird. Falls Extremwerte auftreten, so sind diese in den (x_i, y_i) enthalten, es können aber auch Stellen dabei sein, an denen kein Extremwert vorliegt. Um hierüber eine Entscheidung fällen zu können, müssen wir die hinreichende Bedingung heranziehen.

9.6.2. Hinreichende Bedingung für Extremwerte bei Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen

Wir betrachten die Funktion

$$z = f(x, y),$$

und es sei (x_0, y_0) eine Stelle, für die die beiden partiellen Ableitungen z_x und z_y verschwinden. Mit Hilfe der folgenden Sätze ist es nun möglich zu entscheiden, ob ein Extremwert vorliegt oder nicht.

Satz 1:

Die Funktion $z = f(x,y)$ habe in einem Bereich[1]*) der x,y-Ebene stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, und an einer inneren Stelle (x_0, y_0) dieses Bereiches seien die partiellen Ableitungen erster Ordnung beide gleich 0. Dann ist für das Eintreten eines (relativen) Extremums hinreichend, daß die Ungleichung*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0 \tag{9.46}$$

besteht. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ein Minimum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0)$ oder $f_{yy}(x_0, y_0)$ positiv ist, und ein Maximum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0)$ oder $f_{yy}(x_0, y_0)$ negativ ist.

Beweis:

Wenn im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ die Ungleichung (9.46) gilt, so gilt diese wegen der Stetigkeit von $z = f(x,y)$ auch in einer gewissen Umgebung des Punktes P_0, beispielsweise im Punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$, wobei h und k entsprechend gewählt werden. Aus

$$f_{xx}(x_0 + h, y_0 + k)\, f_{yy}(x_0 + h, y_0 + k) > [f_{xy}(x_0 + h, y_0 + k)]^2$$

folgt weiter, daß in der Umgebung von P_0 sowohl f_{xx} als auch f_{yy} von Null verschieden sind und daß beide das gleiche Vorzeichen haben.

Entwickelt man $z = f(x,y)$ an der Stelle $P_0(x_0, y_0)$ nach der Taylorschen Formel bis zum Restglied zweiter Ordnung und berücksichtigt man dabei

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

so erhält man

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\,[f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, h^2 + \\ + 2 f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, hk + f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, k^2]. \tag{9.47}$$

---

[1]) Definitionsbereich oder Teil davon.

Wegen $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ kann man die rechte Seite wie folgt umformen (die Argumente $(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$ lassen wir dabei weg):

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2f_{xx}} [(hf_{xx} + kf_{xy})^2 + k^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)]$$

Weil $(hf_{xx} + kf_{xy})^2$ stets positiv und in der gesamten Umgebung von P_0 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ist, hängt das Vorzeichen der Differenz

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

nur vom Vorzeichen von f_{xx} ab.

Ist $f_{xx} > 0$, so ist auch $\Delta z > 0$, dann liegt nach (9.43) ein *Minimum* vor. Für $f_{xx} < 0$ und somit $\Delta z < 0$ liegt nach (9.44) ein *Maximum* vor.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß an einer Stelle (x_0, y_0) kein Extremum vorliegt, liefert Satz 2.

Satz 2:

Wenn eine Funktion $z = f(x,y)$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, jedoch mit dem Unterschied, daß

(9.48) $$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$$

ist, so hat sie an der Stelle (x_0, y_0) sicher weder ein Minimum noch ein Maximum.

Beweis:

Unter den im Satz 1 gemachten Voraussetzungen kann es zunächst vorkommen, daß die Ableitungen $f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ beide gleich Null sind. Dann ist $f_{xy}(x_0, y_0)$ infolge der Ungleichung (9.48) sicher von Null verschieden. Nimmt man nun $k = h$, so erhält man aus Gleichung (9.47)

$$f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{h^2}{2} [f_{xx}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_1 h) + 2f_{xy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_1 h) + f_{yy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_1 h)]$$

und für $k = -h$

$$f(x_0 + h, y_0 - h) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{h^2}{2} [f_{xx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 - \vartheta_2 h) - 2f_{xy}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 - \vartheta_2 h) + f_{yy}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 - \vartheta_2 h)],$$

wo sowohl ϑ_1 als auch ϑ_2 zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten. Nun streben die Ausdrücke der in diesen beiden Gleichungen auftretenden eckigen Klammern

für $h \to 0$ (und wegen der Annahme $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) = 0$) gegen die Grenzwerte

$$2 f_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad -2 f_{xy}(x_0, y_0),$$

haben also (weil $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$ wegen Ungleichung (9.48) ausgeschlossen ist) für nahe bei Null liegende Werte von h entgegengesetzte Vorzeichen. Das heißt aber, daß sich in jeder Umgebung der Stelle (x_0, y_0) sowohl Stellen befinden, an denen die Funktionswerte größer als $f(x_0, y_0)$ sind, als auch Stellen, an denen die Funktionswerte kleiner als $f(x_0, y_0)$ sind, so daß der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ weder ein Minimal- noch ein Maximalwert sein kann.

Somit bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, daß die Ableitungen $f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ nicht beide gleich Null sind.

Es sei etwa $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$. Wenn man dann zunächst $k = 0$ nimmt, erhält man aus Gleichung (9.47)

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0)$$

und erkennt, daß die links stehende Differenz für hinreichend nahe bei Null liegende Werte von h das gleiche Vorzeichen haben muß wie $f_{xx}(x_0, y_0)$.

Setzt man dagegen

$$\text{(9.49)} \qquad h = -f_{xy}(x_0, y_0)\, s, \qquad k = f_{xx}(x_0, y_0)\, s,$$

wobei s eine hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Zahl ist, so findet man, daß die Differenz

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

bei hinreichend kleinem absoluten Wert von s das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie $f_{xx}(x_0, y_0)$. Man erhält nämlich aus Gleichung (9.47)

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} s^2 \{[f_{xy}(x_0, y_0)]^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) -$$

$$-2 f_{xy}(x_0, y_0) f_{xx}(x_0, y_0) f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) +$$

$$+ [f_{xx}(x_0, y_0)]^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\},$$

wobei unter h, k die durch die Gleichungen (9.49) gegebenen Werte zu verstehen sind. Da der Ausdruck in der geschweiften Klammer für $s \to 0$ dem Grenzwert

$$f_{xx}(x_0, y_0) \{f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2\}$$

zustrebt, hat die rechte Seite der Gleichung (9.50) infolge der Ungleichung (9.48) für hinreichend nahe bei Null liegende Werte von s das entgegengesetzte Vorzeichen wie $f_{xx}(x_0, y_0)$. Damit ist wieder gezeigt, daß die Differenz

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

in jeder Umgebung der Stelle (x_0, y_0) sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, was das Vorhandensein eines Minimums oder Maximums der Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ausschließt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Für den Fall, daß

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$$

ist, muß man zur Entscheidung der Frage, ob ein Extremum vorliegt, höhere Ableitungen heranziehen. Diesen Fall wollen wir hier nicht behandeln.

9.6.3. Zusammenfassung von 9.6.1. und 9.6.2. — Beispiel

Zusammenfassend geben wir noch einmal die Schritte an, die getan werden müssen, um die Extremwerte der Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen.

Regel:

Ist

$$z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, die stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, so bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y),\ f_y(x, y),\ f_{xx}(x, y),\ f_{xy}(x, y),\ f_{yy}(x, y).$$

a) Notwendige Bedingung:

Wir setzen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ gleich Null und bestimmen alle Wertepaare (x_i, y_i) für $i = 0, 1, 2, \ldots,$ die die beiden Gleichungen

(9.50) $$\boxed{f_x(x, y) = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{f_y(x, y) = 0}$$

erfüllen. Das sind alle Stellen der Funktion, an denen eine horizontale Tangentialebene vorliegt.

b) Hinreichende Bedingung:

Für die Stellen (x_i, y_i) berechnen wir die Diskriminante:

(9.51) $$\boxed{D(x_i, y_i) = f_{xx}(x_i, y_i)\, f_{yy}(x_i, y_i) - [f_{xy}(x_i, y_i)]^2}$$

Ist

α) $D(x_i, y_i) > 0$, *so liegt sicher* ***ein*** ***Extremwert*** *vor;*

β) $D(x_i, y_i) < 0$, *so liegt sicher* ***kein*** ***Extremwert*** *vor;*

γ) $D(x_i, y_i) = 0$, *so läßt sich keine Entscheidung fällen.*

c) Entscheidungsbedingung:

Für diejenigen Stellen (x_i, y_i), für die $D(x_i, y_i) > 0$ ist, betrachten wir entweder $f_{xx}(x_i, y_i)$ oder $f_{yy}(x_i, y_i)$, weil $\operatorname{sgn} f_{xx}(x_i, y_i) = \operatorname{sgn} f_{yy}(x_i, y_i)$ ist.

Es existiert für $f_{xx}(x_i, y_i) > 0$ ein ***Minimum****, für $f_{xx}(x_i, y_i) < 0$ ein* ***Maximum****.*

d) *Zuletzt berechnet man noch die extremalen Funktionswerte z_{min} und z_{max} von $z = f(x,y)$.*

Beispiel:

Es sind die Extremwerte der Funktion

$$z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290$$

zu berechnen.

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen:

$$z_x = 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57$$
$$z_y = 6xy - 18x - 36y + 138$$
$$z_{xx} = 6x - 36$$
$$z_{xy} = z_{yx} = 6y - 18$$
$$z_{yy} = 6x - 36$$

a) Aus $z_x = 0$ und $z_y = 0$ folgt:

$$3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57 = 0 \quad | :3$$
$$6xy - 18x - 36y + 138 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 19 = 0 \quad | + | -$$
$$2xy - 6x - 12y + 46 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 18x - 18y + 65 = 0 \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 27 = 0$$

$$(x + y)^2 - 18(x + y) + 65 = 0 \qquad (x - y)^2 - 6(x - y) - 27 = 0$$

$$(x + y)_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81 - 65} \qquad (x - y)_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 27}$$

$$= 9 \pm 4 \qquad = 3 \pm 6$$

$$(x + y)_1 = \underline{13} \qquad (x - y)_1 = \underline{9}$$

$$(x + y)_2 = \underline{5} \qquad (x - y)_2 = \underline{-3}$$

Durch Kombination der Lösungen von $(x + y)$ und $(x - y)$ erhält man

I	II	III	IV
$x + y = 13$	$x + y = 13$	$x + y = 5$	$x + y = 5$
$x - y = 9$	$x - y = -3$	$x - y = 9$	$x - y = -3$
$x_1 = 11$	$x_2 = 5$	$x_3 = 7$	$x_4 = 1$
$y_1 = 2$	$y_2 = 8$	$y_3 = -2$	$y_4 = 4$

An diesen 4 Stellen (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, 4$ liegt eine horizontale Tangentialebene vor.

b) $f_{xx}(11;2) = 30 \qquad f_{yy}(11;2) = 30 \qquad f_{xy}(11;2) = -6$

$f_{xx}(5;8) = -6 \qquad f_{yy}(5;8) = -6 \qquad f_{xy}(5;8) = 30$

$f_{xx}(7;-2) = 6 \qquad f_{yy}(7;-2) = 6 \qquad f_{xy}(7;-2) = -30$

$f_{xx}(1;4) = -30 \qquad f_{yy}(1;4) = -30 \qquad f_{xy}(1;4) = 6$

$D(x, y) = f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$

$D(11;2) = 30 \cdot 30 - 36 = 864 > 0$ Extremwert

$D(5;8) = (-6)(-6) - 900 = -864 < 0$ kein Extremwert

$D(7;-2) = 6 \cdot 6 - 900 = -864 < 0$ kein Extremwert

$D(1;4) = (-30)(-30) - 36 = 864 > 0$ Extremwert

c) $f_{xx}(11;2) = 30 > 0$, also liegt Minimum vor.

$f_{xx}(1;4) = -30 < 0$, also liegt Maximum vor.

d) $z_{min} = f(11;2) = 1331 + 132 - 2178 - 396 - 72 + 627 + 276 + 290 = \underline{10}$

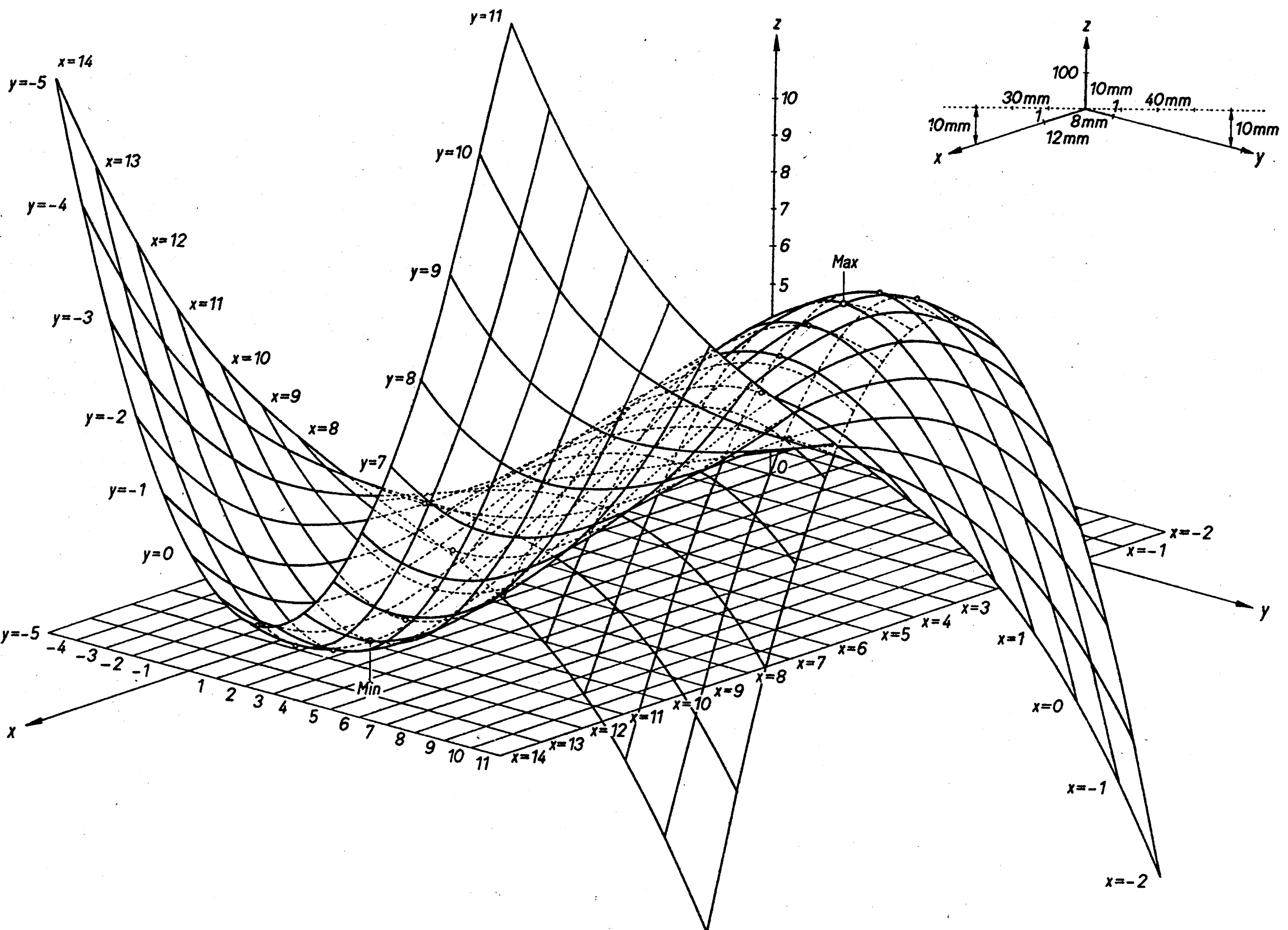

z
10
9
8
7
6
5
Max
Min
0
x
y
y=11
y=10
y=9
y=8
y=7
y=0
y=-1
y=-2
y=-3
y=-4
y=-5
x=14
x=13
x=12
x=11
x=10
x=9
x=8
x=7
x=6
x=5
x=4
x=3
x=1
x=0
x=-1
x=-2
100
10mm
30mm
40mm
8mm
12mm
1

Abb. 4

$$z_{\max} = f(1; 4) = 1 + 48 - 18 - 72 - 288 + 57 + 552 + 290 = \underline{570}$$

An der Stelle $\underline{x = 11}$, $\underline{y = 2}$, $\underline{z = 10}$ liegt ein Minimum vor und

an der Stelle $\underline{x = 1}$, $\underline{y = 4}$, $\underline{z = 570}$ ein Maximum.

In Abb. 4 ist die Fläche der Funktion

$$z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290$$

graphisch dargestellt.

9.6.4. Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremwerte bei Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen

Die Funktion

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sei in einem Bereich B definiert, und $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ sei ein innerer Punkt von B. Mit der Abkürzung

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

definieren wir —

Definition:

Die Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat in $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ein Maximum, wenn für alle von $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ verschiedenen Punkte der Umgebung

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta;\ x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta;\ \ldots;\ x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

von $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ die Ungleichung

$$\Delta u < 0$$

gilt; sie hat ein Minimum, wenn die Ungleichung

$$\Delta u > 0$$

erfüllt ist.

Wir nehmen an, die Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ habe im Punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ein Extremum. Dann gilt der folgende Satz.

Satz 1:

Wenn im Punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ der Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ endliche partielle Ableitungen 1. Ordnung existieren, so sind sie sämtlich gleich Null, so daß also das Verschwinden der partiellen Ableitungen erster Ordnung eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist.

Beweis:

Wir setzen $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ und lassen nur x_1 veränderlich. Dann erhalten wir eine Funktion, die nur von x_1 abhängt:

$$u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

Da wir angenommen haben, in $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ liege ein Extremum, etwa ein Maximum, vor, folgt hieraus insbesondere, daß in einer gewissen Umgebung $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$ des Punktes $x_1 = x_1^0$ die Ungleichung

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) < f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

gelten muß, so daß die Funktion $u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, die nur von der Veränderlichen x_1 abhängt, in x_1^0 ein Maximum hat. Nach Satz 2 aus 4.5.1. [Lbf. 5/6, S. 11] folgt dann

$$f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

In derselben Weise kann man zeigen, daß in $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ auch die übrigen partiellen Ableitungen gleich Null sind.

Die „extremwertverdächtigen"[1]) Punkte sind also diejenigen, in denen die partiellen Ableitungen erster Ordnung verschwinden. Man findet ihre Koordinaten, indem man das folgende Gleichungssystem löst:

$$\begin{gathered} f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Auch für den Fall von Funktionen mit n unabhängigen Veränderlichen lassen sich hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extremwerten aus der Taylorschen Formel ableiten. Aber es würde zu weit führen, solche Bedingungen herzuleiten. Wir werden eine hinreichende Bedingung ohne Beweis angeben.

Satz 2:

Die Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ habe in einem Bereich des n-dimensionalen Raumes stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, und an einer inneren Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ dieses Bereiches seien die partiellen Ableitungen erster Ordnung sämtlich

[1]) stationären

gleich Null. Dann hat die Funktion an dieser Stelle ein Minimum, wenn für $i = 1, 2, \ldots, n$ an dieser Stelle die Funktionaldeterminanten

(9.52)
$$\frac{\partial (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_i})}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_i)}$$

sämtlich positiv sind. Sie hat dort ein Maximum, wenn an dieser Stelle die Determinanten (9.52) negativ oder positiv sind, je nachdem die Ordnung der Unterdeterminante ungerade oder gerade ist.

9.6.5. Extremwerte mit Nebenbedingungen

Wir betrachten das Problem, den kürzesten Abstand der Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und $P(x,y)$ zu bestimmen, wobei $P_0(x_0, y_0)$ ein fest vorgegebener Punkt der Ebene ist und $P(x,y)$ auf einem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ liegt (Abb. 5).

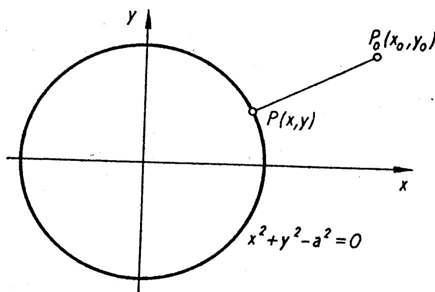


Abb. 5

. ie Abstandsfunktion ist hierbei

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}\,.$$

Ersetzt man y gemäß der Kreisgleichung durch $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, so hängt ϱ nur noch von x ab, und das Problem wäre mit den bisher angegebenen Methoden lösbar.

In den folgenden Betrachtungen werden wir ein Lösungsverfahren herleiten, das die Bestimmung der Extremwerte einer Funktion

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ermöglicht, wenn die n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noch k zusätzlichen Bedingungen

(9.53)
$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

unterworfen sind (Extremwerte mit Nebenbedingungen).

Dazu setzen wir voraus, daß die Funktionen $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und die k Nebenbedingungen $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach allen Argumenten besitzen und die aus den partiellen Ableitungen der Funktionen $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ gebildete Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ den Rang k hat (d. h., es ist mindestens eine Unterdeterminante k-ter Ordnung von Null verschieden, während alle Unterdeterminanten höherer Ordnung verschwinden).[1] Zur Erleichterung unserer Betrachtungen nehmen wir an, daß die aus den k ersten Spalten gebildete Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nicht verschwinde. Hierin liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen, weil man durch passende Änderung der Bezeichnungen stets erreichen kann, daß sie erfüllt wird. Unter diesen Bedingungen läßt sich das System (9.53) so auflösen, daß die ersten k Veränderlichen x_1, $x_2, \ldots, x_k$ als Funktionen der letzten $(n - k)$ Veränderlichen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ dargestellt werden:

$$x_l = \varphi_l(x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (l = 1, \ldots, k)$$

Dann wird

$$u = f[\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n] = h[x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

---

[1]) Vgl. Matrizen, Lbf. 2, Kap. 5.6.

Notwendig für das Bestehen eines Extremums ist nach 9.6.4. unter Verwendung von (9.17) [Lbf. 12, S. 30]

$$\frac{\partial h}{\partial x_r} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_l} \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} \right) + \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \quad \text{für} \quad r = (k+1), \ldots, n.$$

Berücksichtigt man noch $x_l = \varphi_l$, so erhält man schließlich $(n - k)$ Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} = 0 \quad \text{für} \quad r = (k+1), \ldots, n. \tag{9.54}$$

Ferner erfüllen die k Gleichungen (9.53)

$$g_i[\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n] = 0$$

die $k \cdot (n - k)$ Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \text{ und } r = k+1, \ldots, n. \tag{9.55}$$

Mit (9.54) und (9.55) erhalten wir insgesamt

$$(n-k) + k(n-k) = (k+1)(n-k)$$

Gleichungen zur Bestimmung von $x_1, \ldots, x_n$. Sind speziell $k = n - 1$ Nebenbedingungen vorgegeben, so erhält man n Bedingungsgleichungen für die n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

Lagrange[1]) erkannte, daß man zu den $(k + 1)$ $(n - k)$ Gleichungen (9.54) und (9.55) auch dadurch gelangen kann, daß man die Extremwerte der Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{9.56}$$

estimmt. Hierin sind sowohl $x_1, \ldots, x_n$ als auch $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ als unabhängige 'eränderliche aufzufassen; denn wegen $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für $i = 1, \ldots, k$ kann nan die Faktoren λ_i beliebig wählen. Wir zeigen nun, daß der Ansatz von La-;range auf die Gleichungen (9.54) und (9.55) führt.

Notwendig für die Existenz von Extremwerten ist nach 9.6.4.

$$\frac{\partial F}{\partial x_r} = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, n \tag{9.57}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, k.$$

---

1) Lagrange, J. L., (1736–1813), frz. Math.

Die letzte Bedingung ergibt genau die k Nebenbedingungen (9.53). Nach (9.57) ist dann, weil sich F wieder — wie oben — in der Form

$$F = F[\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n]$$

darstellen läßt,

(9.58) $$\frac{\partial F}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} = 0 \quad \text{für} \quad r = k+1, \ldots, n.$$

Andererseits folgt aus (9.56)

$$\frac{\partial F}{\partial x_r} = \frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_r}.$$

Setzt man hiernach $\frac{\partial F}{\partial x_r}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial x_l}$ in (9.58) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_l} \right\} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} \right] = 0$$

für $r = k + 1, \ldots, n$. Weil die Größen λ_i beliebige Zahlen sein können, folgt für $\lambda_i = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_l} = 0 \quad \text{für} \quad r = k+1, \ldots, n.$$

Das sind aber gerade die $(n - k)$ Gleichungen (9.54). Dann ergeben sich aus dieser Gleichung weiter für $\lambda_i = 1$ und $\lambda_j = 0$ $(i \neq j)$ sukzessive die Gleichungen

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r} = 0$$

für $i = 1, \ldots, k$ und $r = k + 1, \ldots, n$, die mit (9.55) übereinstimmen.

Damit ist gezeigt, daß der Ansatz von Lagrange auf ein Gleichungssystem führt, dessen Lösung die Extremstellen unter Berücksichtigung der Nebenbedingung liefert.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich als Regel zusammenfassen, bei der man von der Methode der *unbestimmten Faktoren* (Lagrangesche Multiplikatoren) spricht.

Regel:

Aus der Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und den Funktionen* $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, k$ *bildet man formal eine neue Funktion*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_k g_k(x_1, \ldots, x_n),$$

in der sowohl die Größen $x_1, \ldots, x_n$ als auch $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ als unabhängige Veränderliche aufgefaßt werden. Sodann berechnet man die Extremwerte der Funktion $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Die notwendigen Bedingungen lauten dann:

$$F_{x_1}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0$$

$$F_{x_2}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f_{x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{x_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0$$

$$F_{\lambda_1}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = g_1 = 0$$

$$F_{\lambda_2}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = g_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{\lambda_k}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = g_k = 0$$

Löst man das System von $(n + k)$ Gleichungen

$$f_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0$$

$$f_{x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

$$\cdots$$

$$g_k = 0$$

mit den $(n + k)$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auf, so erhält man die Koordinaten aller Stellen, an denen möglicherweise ein Minimum oder Maximum der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Bedingungen (9.53) vorliegen kann.

Die Frage, ob an einer dieser Stellen wirklich ein Extremum auftritt und ob es sich dabei um ein Minimum oder Maximum handelt, bedarf jedesmal noch einer besonderen Erörterung.

Beispiele:

1. Es sind die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

zu bestimmen.

Lösung:
Die Funktion $f(x,y) = xy$ stellt eine Sattelfläche im Raum dar [vgl. Lbf. 12, Übungsaufgabe 3], die mit dem Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, geschnitten wird. Die Extremwerte der Schnittkurve sind zu berechnen.

Wir setzen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$$

und bilden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung:

$$F_x = y + 2\lambda x$$

$$F_y = x + 2\lambda y$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - a^2$$

Setzt man $F_x = 0$, $F_y = 0$ und $F_\lambda = 0$, so erhält man das Gleichungssystem

$$y + 2\lambda x = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten x, y, λ. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt jeweils

$$\lambda = -\frac{y}{2x} \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{x}{2y}$$

und daraus

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

oder

$$y^2 = x^2.$$

Diese Gleichung wird sowohl von $y = x$ als auch von $y = -x$ erfüllt. Durch Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt sich

$$2x^2 = a^2$$

oder

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Aus der Bedingung $y = x$ erhält man die Wertepaare

$$x_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\; y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \text{und} \quad x_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a,\; y_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

und aus $y = -x$

$$x_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\; y_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \text{und} \quad x_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a,\; y_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Die Entscheidung, ob an einer solchen Stelle ein Extremwert vorliegt und ob es dann ein Maximum oder Minimum ist, können wir aus der folgenden geometrischen Betrachtung fällen.

Der Zylinder schneidet aus der Sattelfläche eine geschlossene Raumkurve heraus (Abb. 6). Weil die Sattelfläche im 1. und 3. Quadranten keine negativen Funktionswerte hat, liegen bei (x_{11}, y_{11}) und (x_{21}, y_{21}) Maxima vor, und weil sie im 2. und 4. Quadranten keine positiven Funktionswerte hat, liegen bei (x_{12}, y_{12}) und (x_{22}, y_{22}) Minima vor.

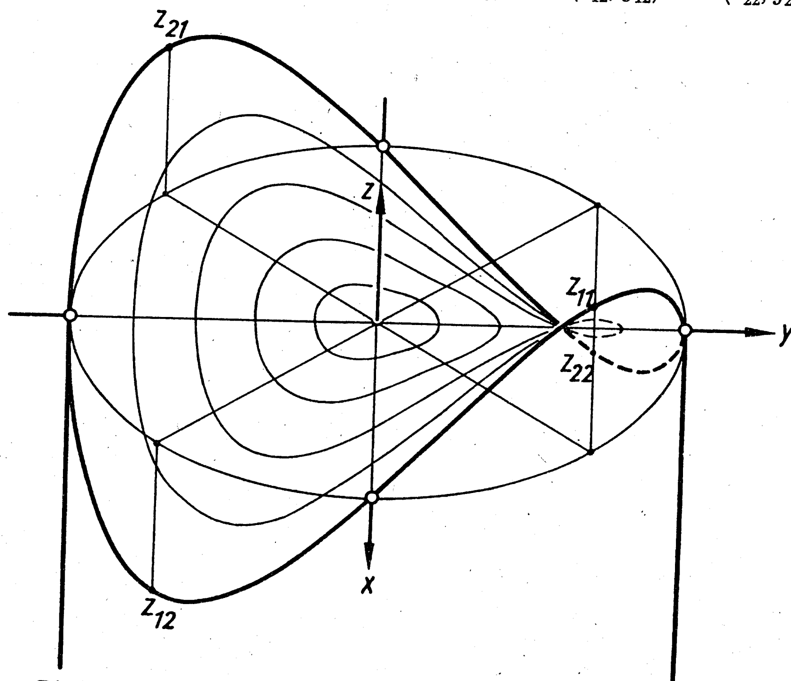


Abb. 6

Die Funktionswerte sind

$$z_{11} = \frac{a^2}{2},\; z_{21} = \frac{a^2}{2},\; z_{12} = -\frac{a^2}{2},\; z_{22} = -\frac{a^2}{2}.$$

Ergebnis:

$$\underline{x_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}a},\quad \underline{y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}a},\quad \underline{z_{11} = \frac{a^2}{2}}\quad \underline{\text{Maximum}}$$

$$\underline{x_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a},\quad \underline{y_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a},\quad \underline{z_{21} = \frac{a^2}{2}}\quad \underline{\text{Maximum}}$$

$$x_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad y_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad z_{12} = -\frac{a^2}{2} \quad \text{Minimum}$$

$$x_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad y_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad z_{22} = -\frac{a^2}{2} \quad \text{Minimum}$$

2. Wir betrachten einen elektrischen Stromkreis in Parallelschaltung. Abb. 7 zeigt das Schaltschema, A und B sind die Klemmen der Stromquelle, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ Geräte, durch die die Ströme $i_1, i_2, \ldots, i_n$ fließen.

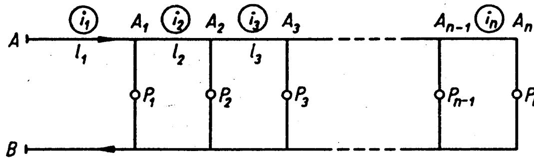


Abb. 7

Man bestimme bei vorgegebenem Spannungsabfall 2 U im Stromkreis den Querschnitt der Leiter so, daß auf der ganzen Leitung möglichst wenig Kupfer gebraucht wird.

Offenbar braucht man nur einen der Leiter zu untersuchen, etwa AA_n, da für den anderen dieselben Bedingungen gelten. Mit $l_1, l_2, \ldots, l_n$ bezeichnen wir die Längen der Stücke $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ in Metern, mit $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die Querschnitte in Quadratmillimetern. Dann ist

$$V = l_1q_1 + l_2q_2 + \cdots + l_nq_n$$

das Volumen der erforderlichen Kupfermenge in Kubikzentimetern. Wir müssen den kleinsten Wert dieser Funktion V unter der Annahme bestimmen, daß der Spannungsabfall in $A\,A_n$ gleich U ist. Man berechnet leicht, welche Ströme $I_1, I_2, \ldots, I_n$ in den Strecken $A\,A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ fließen:

$$I_1 = i_1 + i_2 + \cdots + i_n, \quad I_2 = i_2 + i_3 + \cdots + i_n, \quad \ldots, \quad I_n = i_n.$$

Ist ϱ der Widerstand eines kupfernen Leiters von 1 m Länge und mit 1 mm² Querschnitt, so sind die Widerstände dieser Strecken

$$R_1 = \frac{\varrho l_1}{q_1}, \; R_2 = \frac{\varrho l_2}{q_2}, \ldots, R_n = \frac{\varrho l_n}{q_n},$$

und nach dem Ohmschen Gesetz wird der Spannungsabfall folgendermaßen ausgedrückt:

$$U_1 = R_1I_1 = \frac{\varrho l_1 I_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad U_n = R_nI_n = \frac{\varrho l_n I_n}{q_n}.$$

Dann ist der Spannungsabfall im gesamten Leiter

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \varrho\left(\frac{l_1I_1}{q_1} + \frac{l_2I_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_nI_n}{q_n}\right).$$

Unsere Aufgabe können wir nun folgendermaßen formulieren:

Es ist das Minimum der Funktion

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n$$

unter der Nebenbedingung

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \varrho \left(\frac{l_1 I_1}{q_1} + \frac{l_2 I_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_n I_n}{q_n} \right)$$

zu berechnen.

Wir bilden

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda) = V(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n + \\ + \lambda \varrho \left(\frac{l_1 I_1}{q_1} + \frac{l_2 I_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_n I_n}{q_n} \right).$$

Dann ist

$$F_{q_1} = l_1 - \lambda \varrho \frac{l_1 I_1}{q_1^2}, \quad F_{q_1} = 0 \to q_1 = \sqrt{\lambda \varrho I_1}\,.$$

$$F_{q_2} = l_2 - \lambda \varrho \frac{l_2 I_2}{q_2^2}, \quad F_{q_2} = 0 \to q_2 = \sqrt{\lambda \varrho I_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{q_n} = l_n - \lambda \varrho \frac{l_n I_n}{q_n^2}, \quad F_{q_n} = 0 \to q_n = \sqrt{\lambda \varrho I_n}\,.$$

Aus der Nebenbedingung

$$\varrho \left(\frac{l_1 I_1}{q_1} + \frac{l_2 I_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_n I_n}{q_n} \right) - U = 0$$

erhält man den Proportionalitätsfaktor $\sqrt{\lambda}$:

$$\frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\lambda}} (l_1 \sqrt{I_1} + l_2 \sqrt{I_2} + \cdots + l_n \sqrt{I_n}) - U = 0$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\varrho}}{U} \cdot \sum_{k=1}^{n} l_k \sqrt{I_k}$$

lich ergibt sich der minimale Materialverbrauch für

$$q_1 = \frac{\varrho}{U} \sqrt{I_1} \cdot \sum_{k=1}^{n} l_k \sqrt{I_k}, \quad q_2 = \frac{\varrho}{U} \sqrt{I_2} \sum_{k=1}^{n} l_k \sqrt{I_k}, \ldots, q_n = \frac{\varrho}{U} \sqrt{I_n} \sum_{k=1}^{n} l_k \sqrt{I_k}$$

und beträgt

$$V_{\min} = \frac{\varrho}{U} \left(\sum_{k=1}^{n} l_k \sqrt{I_k} \right)^2.$$

ÜBUNGSAUFGABEN

16. Untersuche die Funktion

$$z = 2x^3 + 3xy + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 9x - 2y + 5$$

auf Extremwerte!

17. An welcher Stelle hat die Funktion

$$z = -2x^2 + 4xy + 8x + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - 8y + 1$$

Extremwerte?

18. Untersuche die Funktion

$$z = \frac{2}{3}x^3 - 2xy^2 + \frac{5}{3}y^3 + 2y^2 - 5y + \frac{50}{3}$$

auf Extremwerte!

19. An welchen Stellen hat die Funktion

$$z = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}x - y \sin x$$

Extremwerte, und welche davon liegen im Streifen $0 \leqq x \leqq 2\pi$?

20. Bestimme den Punkt $P(x,y)$ in der Ebene eines Dreiecks $P_1P_2P_3$, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Ecken $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ einen kleinsten Wert hat!

21. Es soll ein offener kastenförmiger Behälter vom Inhalt V mit möglichst wenig Material M hergestellt werden. Wie muß man die Maße des Kastens wählen? (Die Materialstärke soll vernachlässigt werden.)

22. Die Fläche eines trapezförmigen Kanalquerschnitts sei gegeben. Wie müssen der Böschungswinkel α und die Höhe h des Pegelstandes gewählt werden, damit der benetzte Rand möglichst klein wird? (Abb. 8).

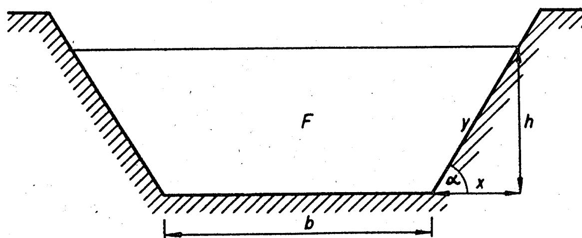


Abb. 8

23. Berechne die Extremwerte der Funktion $z = x + y$, wenn zwischen x und y noch die Beziehung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ besteht!

24. Es ist das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ für positive x, y, z zu berechnen, wenn die Veränderlichen noch die Beziehung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ erfüllen.

25. Man bestimme den größten Wert des Produktes

$$u = xyzt$$

der nichtnegativen Zahlen x, y, z, t unter der Bedingung, daß ihre Summe

$$x + y + z + t = 4c$$

konstant ist.

WIEDERHOLUNGSFRAGEN

1. Welche Form hat die Funktionaldeterminante eines Systems von drei Funktionen und drei Veränderlichen

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3)\,? \end{aligned}$$

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Funktionaldeterminante eines Funktionensystems

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und seiner Umkehrung

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,? \end{aligned}$$

3. Welchen Wert hat die Funktionaldeterminante für Polar- und Zylinderkoordinaten?

4. Wann spricht man von impliziten Funktionen?

5. Wann kann man eine implizite Funktion $F(x, y) = 0$ in der expliziten Form

$$y = f(x)$$

schreiben?

6. Nach welcher Formel kann man y' von $F(x, y) = 0$ bilden?

7. Wie lauten die ersten vier Glieder der TAYLORschen Formel für die Funktion $z = f(x, y)$?

8. In welcher Form gibt man die MACLAURINsche Formel für die Funktion $z = f(x, y)$ an?

9. Wie bildet man bei der TAYLORschen Formel das Restglied n-ter Ordnung?

10. Welche notwendigen Bedingungen sind beim Auftreten von Extremwerten bei Funktionen von zwei Veränderlichen $z = f(x, y)$ erfüllt, und was bedeutet das geometrisch?

11. Welche hinreichende Bedingung garantiert das Auftreten von Extremwerten bei Funktionen von zwei Veränderlichen?

12. Wie kann man beim Auftreten von Extremwerten entscheiden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt?

13. Welche notwendigen Bedingungen sind beim Auftreten von Extremwerten bei Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erfüllt?

14. Was versteht man unter einem Extremum mit Nebenbedingungen?

15. Nach welchem Verfahren kann man Extremwerte mit Nebenbedingungen berechnen, und wie lautet der Ansatz?

LÖSUNGEN DER ÜBUNGSAUFGABEN

1. $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

2. $$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ \frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} \end{vmatrix} =$$

$$= 2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 2y_1^2 = \underline{4y_1^2 - 4y_3^2}$$

3. $$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^{x+y} - \frac{1}{x}}{e^{x+y}} = \underline{\frac{1 - xe^{x+y}}{x\,e^{x+y}}}$$

4. $$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x} = \underline{\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}}$$

für $x \neq y$ und unter Berücksichtigung von $x^y = y^x$.

$$y'(4;2) = \frac{0{,}5 - \ln 2}{2 - \ln 4} = \frac{0{,}5 - 0{,}693}{2 - 1{,}386} = -\frac{0{,}193}{0{,}614} \approx \underline{-0{,}314}$$

5. $F_x = 1$, $F_y = -1 + a\cos y$, $F_{xx} = 0$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = -a\sin y$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1}{-1 + a\cos y} = \underline{\frac{1}{1 - a\cos y}}$$

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} = -\frac{-a\sin y}{(-1 + a\cos y)^3} =$$

$$= \underline{\frac{a\sin y}{(a\cos y - 1)^3}}$$

6. $F_x = 2x - y$; $F_y = -x + 2y$, $F_{xx} = 2$, $F_{xy} = -1$; $F_{yy} = 2$

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} =$$

$$= -\frac{2(-x + 2y)^2 + 2(2x - y)(-x + 2y) + 2(2x - y)^2}{(-x + 2y)^3} = \underline{\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3}}$$

7. Schnittpunkte: $y = 1$: $x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0$

$S_1 = (-1; 1)$, $S_2 = (4; 1)$, $S_3 = (-4; 1)$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + 2xy^2 - 16y^3}{2x^2y - 48xy^2} = \underline{\frac{3x^2 + 2xy^2 - 16y^3}{48xy^2 - 2x^2y}}$$

$$y'(-1; 1) = \frac{3 - 2 - 16}{-48 - 2} = \frac{15}{50} = \underline{\frac{3}{10}} = \underline{0{,}3}$$

$$y'(4; 1) = \frac{48 + 8 - 16}{192 - 32} = \frac{40}{160} = \underline{\frac{1}{4}} = \underline{0{,}25}$$

$$y'(-4; 1) = \frac{48 - 8 - 16}{-192 - 32} = \frac{24}{-224} = -\underline{\frac{3}{28}} \approx \underline{0{,}11}$$

8. Berührungspunkt: $x_0 = 1$; $2 - y^2 - 3 + y + 7 = 0$, $y^2 - y - 6 = 0$

$$\underline{y_0 = -2}; \; (y_0 < 0), \; y_1 = 3$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{6x^2 - 2xy^2 - 3}{-2x^2y + 1} = \frac{6x^2 - 2xy^2 - 3}{2x^2y - 1}$$

$$y'(1; -2) = \frac{6 - 8 - 3}{-4 - 1} = \underline{1}$$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{y + 2}{x - 1} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \underline{y = x - 3}$$

9. $$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6x}{3y^2} = -\frac{x(x-2)}{y^2},$$

$y' = 0 \, (x \neq 0) \rightarrow \underline{x = 2}$, $\underline{y = \sqrt[3]{4}}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0, x = 3$

Schnittwinkel: $y'(3; 0) = -\infty$.

Die x-Achse wird an der Stelle $(3; 0)$ unter einem Winkel von $\alpha = 90°$ geschnitten.

10. $F_x = 4x + 6y + 2$, $F_y = 6x + 6y + 6$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x + 6y + 2}{6y + 6x + 6} = -\frac{2x + 3y + 1}{3y + 3x + 3}$$

$$2x + 3y + 1 = 0, \quad x = -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$2\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)^2+3y^2+6\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)y+2\left(-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)+6y+5=0$$

$y^2-2y-3=0, \quad y_{1,2}=1\pm 2$

$y_1 = 3,\ x_1=-5$

$y_2=-1\ \ x_2= 1$

$F_x(-5;3)=0,\ F_y(-5;3)=-6,\ F_{xx}(-5;3)=4,\ F_{xy}(-5;3)=6,$
$F_{yy}(-5;3)=6$

$F_x(1;-1)=0,\ F_y(1;-1)=6,\ F_{xx}(1;-1)=4,\ F_{xy}(1;-1)=6,$
$F_{yy}(1;-1)=6$

$$y''=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

$$y''(-5;3)=-\frac{4\cdot 36}{-216}=\frac{144}{216}=\frac{2}{3}>0 \text{ Min.}$$

$$y''(1;-1)=-\frac{4\cdot 36-12\cdot 0+6\cdot 0}{6^3}=-\frac{2}{3}<0 \text{ Max.}$$

An der Stelle $(-5;3)$ liegt ein Minimum vor, und
an der Stelle $(1;-1)$ liegt ein Maximum vor.

11. $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\ F_y=\frac{2y}{b^2},\ F_z=\frac{2z}{c^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{c^2}{2z}=-\underline{\frac{c^2x}{a^2z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{c^2}{2z}=-\underline{\frac{c^2y}{b^2z}}$$

12. $F(x,y,z)=2x-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=0$

$$F_x=2,\ F_y=-\frac{2y}{a^2},\ F_z=\frac{2z}{b^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{-2y}{2a^2}=\underline{\frac{y}{a^2}},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_x}=-\frac{2z}{2b^2}=-\underline{\frac{z}{b^2}}$$

13. $z = x^2 - y^2 + \sin x \cos y$ $\qquad z\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{5}{36}\pi^2 + \frac{1}{2}$

$z_x = 2x + \cos x \cos y$ $\qquad z_x\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = \pi$

$z_y = -2y - \sin x \sin y$ $\qquad z_y\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$z_{xx} = 2 - \sin x \cos y$ $\qquad z_{xx}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$z_{xy} = -\cos x \sin y$ $\qquad z_{xy}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$z_{yy} = -2 - \sin x \cos y$ $\qquad z_{yy}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$z_{xxx} = -\cos x \cos y$ $\qquad z_{xxx}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$z_{xxy} = \sin x \sin y$ $\qquad z_{xxy}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$z_{xyy} = -\cos x \cos y$ $\qquad z_{xyy}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$z_{yyy} = \sin x \sin y$ $\qquad z_{yyy}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$z\left(\frac{\pi}{2} + h; \frac{\pi}{3} + k\right) = \frac{5}{36}\pi^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1!}\left[\pi h - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)k\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{3}{2}h^2 - \frac{5}{2}k^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[3 \cdot \frac{1}{2}h^2k + \frac{1}{2}\sqrt{3}k^3\right] + R_3 =$$

$$= \frac{5}{36}\pi^2 + \frac{1}{2} + \pi h - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)k + \frac{3}{4}h^2 - \frac{5}{4}k^2 + \frac{1}{4}h^2k + \frac{1}{12}\sqrt{3}k^3 + R_3$$

---

14. a) $z = x \sin y + y \sin x$ $\qquad z\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$

$z_x = \sin y + y \cos x$ $\qquad z_x\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$

$z_y = x \cos y + \sin x$ $\qquad z_y\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$

$$z_{xx} = -y \sin x \qquad z_{xx}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$z_{xy} = \cos y + \cos x \qquad z_{xy}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_{yy} = -x \sin y \qquad z_{yy}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{8}$$

$$z_{xxx} = -y \cos x \qquad z_{xxx}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$z_{xxy} = -\sin x \qquad z_{xxy}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_{xyy} = -\sin y \qquad z_{xyy}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$z_{yyy} = -x \cos y \qquad z_{yyy}\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$z\left(\frac{\pi}{4}+h, \frac{\pi}{6}+k\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12}\pi + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\pi\right)h + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\right)k\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi h^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)hk - \frac{\pi}{8}k^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi h^3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}h^2k - 3\cdot\frac{1}{2}hk^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi k^3\right] + R_3 =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12}\pi + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\pi\right)h + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\right)k - \frac{\sqrt{2}}{24}\pi h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)hk -$$

$$- \frac{\pi}{16}k^2 - \frac{\sqrt{2}}{72}\pi h^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2k - \frac{1}{4}hk^2 - \frac{\sqrt{3}}{48}\pi k^3 + R_3$$

b) $$z\left(\frac{\pi}{4}+0{,}1;\frac{\pi}{6}+0{,}2\right) \approx 0{,}39270 + \frac{4{,}44287}{12} + \frac{6+4{,}44287}{12}\cdot 0{,}1 +$$

$$+\frac{5{,}44139+5{,}65684}{8}\cdot 0{,}2 - \frac{4{,}44287}{24}\cdot 0{,}01 + \frac{3{,}14626}{2}\cdot 0{,}02 - 0{,}19635\cdot 0{,}04 -$$

$$-\frac{4{,}44287}{72}\cdot 0{,}001 - 0{,}35355\cdot 0{,}002 - 0{,}25\cdot 0{,}004 - \frac{5{,}44139}{48}\cdot 0{,}008 =$$

$$= 0{,}39270 + 0{,}37024 + 0{,}08702 + 0{,}27746 - 0{,}00185 +$$

$$+ 0{,}03146 - 0{,}00785 - 0{,}00006 - 0{,}00071 - 0{,}00100 - 0{,}00091 =$$

$$= \underline{1{,}14650}$$

c) $z\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}1\,;\frac{\pi}{6} + 0{,}2\right) = z(0{,}88540;\ 0{,}72360) =$

$$= 0{,}88540\cdot \sin 0{,}72360 + 0{,}72360\cdot \sin 0{,}88540 =$$

$$= 0{,}88540\cdot 0{,}66209 + 0{,}72360\cdot 0{,}77417 =$$

$$= 0{,}58621 + 0{,}56019 = \underline{1{,}14640}$$

15.

z	$= e^x \sinh y + e^y \cosh x$	$z(0;0)$	$= 1$
z_x	$= e^x \sinh y + e^y \sinh x$	$z_x(0;0)$	$= 0$
z_y	$= e^x \cosh y + e^y \cosh x$	$z_y(0;0)$	$= 2$
z_{xx}	$= e^x \sinh y + e^y \cosh x$	$z_{xx}(0;0)$	$= 1$
z_{xy}	$= e^x \cosh y + e^y \sinh x$	$z_{xy}(0;0)$	$= 1$
z_{yy}	$= e^x \sinh y + e^y \cosh x$	$z_{yy}(0;0)$	$= 1$
z_{xxx}	$= e^x \sinh y + e^y \sinh x$	$z_{xxx}(0;0)$	$= 0$
z_{xxy}	$= e^x \cosh y + e^y \cosh x$	$z_{xxy}(0;0)$	$= 2$
z_{xyy}	$= e^x \sinh y + e^y \sinh x$	$z_{xyy}(0;0)$	$= 0$
z_{yyy}	$= e^x \cosh y + e^y \cosh x$	$z_{yyy}(0;0)$	$= 2$

$$\underline{z(x, y) = 1 + 2y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 + R_3}$$

16. $z = 2x^3 + 3xy + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 9x - 2y + 5$

$$z_x = 6x^2 + 3y + 6x - 9 \qquad z_x = 0$$

$$z_y = \underline{\qquad y + 3x - 2} \qquad z_y = 0$$

$$6x^2 - 3x - 3 = 0, \qquad y = -3x + 2$$

$$x_1 = 1 \qquad y_1 = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{7}{2}$$

$z_{xx} = 12x + 6, \quad z_{yy} = 1, \quad z_{xy} = 3$

$D(x, y) = 12x + 6 - 9 = 3(4x - 1)$

$D(1; -1) = 3 \cdot 3 > 0$ **Extremwert**

$D\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) = 3(-3) < 0$ **kein Extremwert**

$f_{xx}(1; -1) = 18 > 0,$ **Minimum**

$z_{\min} = f(1; -1) = 2 - 3 + 3 + \frac{1}{2} - 9 + 2 + 5 = \frac{1}{2}$

An der Stelle $\underline{x = 1}$, $\underline{y = -1}$, $\underline{z = \frac{1}{2}}$ liegt ein Minimum vor.

17. $z = -2x^2 + 4xy + 8x + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - 8y + 1$

$z_x = -4x + 4y + 8 \qquad z_x = 0$

$z_y = \underline{4x + y^2 + 2y - 8} \qquad z_y = 0$

$y^2 + 6y = 0, \qquad x = y + 2$

$y_1 = 0 \qquad x_1 = 2$

$y_2 = -6 \qquad x_2 = -4$

$z_{xx} = -4, z_{yy} = 2y + 2, z_{xy} = 4$

$D(x, y) = -4(2y + 2) - 16 = -8(y + 3)$

$D(2; 0) = -24 < 0$ **kein Extremwert**

$D(-4; -6) = 24 > 0$ **Extremwert**

$z_{xx}(-4; -6) = -4 < 0$ **Maximum**

$z_{\max} = f(-4; -6) = -32 + 96 - 32 - 72 + 36 + 48 + 1 = 45$

An der Stelle $\underline{x = -4}$, $\underline{y = -6}$, $\underline{z = 45}$ liegt ein Maximum vor.

18. $z = \frac{2}{3}x^3 - 2xy^2 + \frac{5}{3}y^3 + 2y^2 - 5y + \frac{50}{3}$

$z_x = 2x^2 - 2y^2 \qquad z_x = 0: \quad x^2 = y^2 \quad$ a) $x = y$, b) $x = -y$

$z_y = \underline{-4xy + 5y^2 + 4y - 5} \qquad z_y = 0$

a) $x = y$

$$-4y^2 + 5y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = -5$$

b) $x = -y$

$$4y^2 + 5y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 + \frac{4}{9}y - \frac{5}{9} = 0$$

$$y_{3,4} = -\frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{45}{81}}$$

$$y_{3,4} = -\frac{2}{9} \pm \frac{7}{9}$$

$$y_3 = \frac{5}{9}$$

$$y_4 = -1$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = -\frac{5}{9} \quad x_4 = 1$

$y_1 = 1 \quad y_2 = -5 \quad y_3 = \frac{5}{9} \quad y_4 = -1$

$z_{xx} = 4x, \quad z_{yy} = -4x + 10y + 4, \quad z_{xy} = -4y$

$D(x, y) = 4x(-4x + 10y + 4) - 16y^2 = 8(-2x^2 + 5xy + 2x - 2y^2)$

$D(1; 1) = 8(-2 + 5 + 2 - 2) = 8 \cdot 3 > 0$ **Extremwert**

$D(-5; -5) = 8(-50 + 125 - 10 - 50) = 8 \cdot 15 > 0$ **Extremwert**

$D\left(-\frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right) = 8\left(-\frac{50}{81} - \frac{125}{81} - \frac{90}{81} - \frac{50}{81}\right) = -\frac{8 \cdot 315}{81} < 0$ **kein Extremwert**

$D(1; -1) = 8(-2 - 5 + 2 - 2) = -8 \cdot 7 < 0$ **kein Extremwert**

$z_{xx}(1; 1) = 4 > 0$ **Minimum**

$z_{xx}(-5; -5) = -20 < 0$ **Maximum**

$z_{min} = \frac{2}{3} - 2 + \frac{5}{3} + 2 - 5 + \frac{50}{3} = \frac{42}{3} = \underline{14}$

$z_{max} = 25\left(-\frac{10}{3} + 10 - \frac{25}{3} + 2 + 1 + \frac{2}{3}\right) = 25 \cdot 2 = \underline{50}$

An der Stelle $\underline{x_1 = 1}$, $\underline{y_1 = 1}$, $\underline{z_1 = 14}$ liegt ein Minimum und an der Stelle $\underline{x_2 = -5}$, $\underline{y_2 = -5}$, $\underline{z_2 = 50}$ ein Maximum vor.

19. $z = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} \sqrt{3} x - y \sin x$

$z_x = \frac{1}{4} \sqrt{3} - y \cos x$

$z_y = \underline{y - \sin x}$

$z_y = 0: \qquad y = \sin x$

$z_x = 0: \qquad \frac{1}{4} \sqrt{3} - \sin x \cos x = 0$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad 2x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0, \pm 2, \ldots \\ -\frac{1}{2} & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 0, \pm 2, \ldots \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

$z_{xx} = y \sin x, \; z_{yy} = 1, \; z_{xy} = -\cos x$

$D(x, y) = y \sin x - \cos^2 x$

$k = 0, \pm 2, \ldots \qquad D\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} < 0$ keine Extremwerte

$k = \pm 1, \pm 3, \ldots \quad D\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} < 0$ keine Extremwerte

$k = 0, \pm 2, \ldots \qquad D\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$ Extremwerte

$k = \pm 1, \pm 3, \ldots \quad D\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$ Extremwerte

$z_{yy} = 1 > 0 \qquad \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Minima

$$k = 0, \pm 2, \ldots\ z_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi(1 + 3k)$$

$$k = \pm 1, \pm 3, \ldots\ z_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi(1 + 3k)$$

Die Funktion hat an den Stellen $\underline{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$, $\underline{y = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$\underline{z = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi(1 + 3k)}$ für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Minima

Im Streifen $0 \leqq x \leqq 2\pi$ liegen bei

$\underline{x_1 = \frac{\pi}{3}}$, $\underline{y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\underline{z_1 = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$

und

$\underline{x_2 = \frac{4}{3}\pi}$, $\underline{y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\underline{z_2 = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi}$

Minima.

20. Nach Abb. 9 gilt

$a_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \\ &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x - 2(y_1 + y_2 + y_3)y + \\ &\quad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

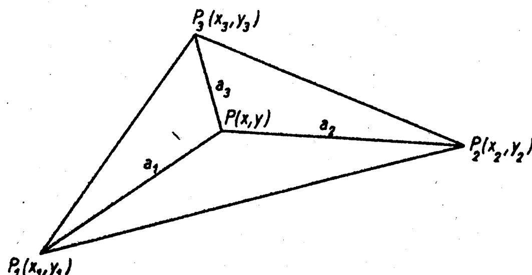


Abb. 9

$$f_x = 6x - 2(x_1 + x_2 + x_3) \qquad f_x = 0 \qquad x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$f_y = 6y - 2(y_1 + y_2 + y_3) \qquad f_y = 0 \qquad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 6, \quad f_{xy} = 0$$

$D(x, y) = 36 > 0, f_{xx} = 6 > 0$, folglich liegt für

$\underline{x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)}$, $\underline{y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)}$ ein Minimum vor.

Diese Koordinaten stellen gerade den Schwerpunkt dar. Der minimale Funktionswert beträgt hierfür

$$f_{\min} = 3\frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3^2} + 3\frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3^2} - \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{2(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3} +$$

$$+ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3)$$

21. Nach Abb. 10 benötigt man das Material für die Grundfläche xy und die zwei Paare von Seitenflächen xz und yz. Danach ist

$$M = xy + 2xz + 2yz.$$

$$V = xyz, \quad z = \frac{V}{xy}$$

$$M(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

$$M_x = y - \frac{2V}{x^2}, \qquad M_y = x - \frac{2V}{y^2}$$

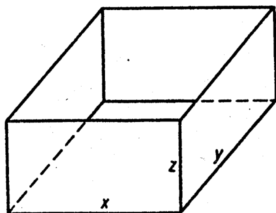


Abb. 10

$$M_x = 0: \quad y = \frac{2V}{x^2}, \qquad M_y = 0: \quad x - \frac{2V}{4V^2} \cdot x^4 = 0$$

$$x\left(\frac{x^3}{2V} - 1\right) = 0, \quad x_0 = 0 \text{ (entfällt)}, x_1^3 = 2V$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2V}, \qquad y_1 = \sqrt[3]{2V}$$

$$M_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \; M_{yy} = \frac{4V}{y^3}, \quad M_{xy} = 1$$

$$D(x, y) = \frac{16V^2}{x^3y^3} - 1.$$

$$D\left(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V}\right) = \frac{16V^2}{2V \cdot 2V} = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{Extremwert}$$

$$M_{xx}\left(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V}\right) = \frac{4V}{2V} = 2 > 0 \quad \text{Minimum}$$

$$z_1 = \frac{V}{\sqrt[3]{2V} \cdot \sqrt[3]{2V}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$$

$$M_{\min} = \sqrt[3]{2V} \cdot \sqrt[3]{2V} + 2\sqrt[3]{2V} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} + 2\sqrt[3]{2V} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \underline{3\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2}$$

22. $U = 2y + b$

$$F = h \cdot \frac{b + (b + 2x)}{2} = h(b + x) \qquad x = h \cdot \cot\alpha, \quad y = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$F = hb + h^2 \cot\alpha \qquad b = \frac{F}{h} - h\cot\alpha$$

$$U(\alpha, h) = \frac{2h}{\sin\alpha} + \frac{F}{h} - h\cot\alpha$$

$$U_\alpha = \frac{-2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{h}{\sin^2\alpha} \qquad U_\alpha = 0: h = 0 \text{ (entfällt)}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

$$U_h = \frac{2}{\sin\alpha} - \frac{F}{h^2} - \cot\alpha$$

$$U_h = 0, \alpha = \frac{\pi}{3}: \quad \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{F}{h^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \quad h^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}F, \quad \underline{h = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}}$$

$$U_{\alpha\alpha}(\alpha, h) = \frac{2h}{\sin^3\alpha}[\cos^2\alpha - \cos\alpha + 1];$$

$$U_{\alpha\alpha}\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{F}\cdot 2^3}{\sqrt[4]{3}\cdot(\sqrt{3})^3}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{4\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3^3}}$$

$$U_{hh}(\alpha, h) = \frac{2F}{h^3} \qquad U_{hh}\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2F}{F\sqrt{F}}\cdot\sqrt[4]{3^3}$$

$$U_{\alpha h}(\alpha, h) = -\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$U_{\alpha h}\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4}} = 0$$

$$D\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{4\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3^3}}\cdot\frac{2F\sqrt[4]{3^3}}{F\sqrt{F}} = 8 > 0 \qquad \text{Extremwert}$$

$$U_{\alpha\alpha}\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{4\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3^3}} > 0 \qquad \text{Minimum}$$

$$U_{\min} = \frac{2\sqrt{F}\cdot 2}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3}} + \frac{F\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{F}} - \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{F}\left(\frac{4}{\sqrt[4]{3^3}} + \sqrt[4]{3} - \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\right) =$$

$$= \sqrt{F}\left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{3}\right) = \underline{2\sqrt{F}\cdot\sqrt[4]{3}}$$

Für $\underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}$, $\underline{h = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}}}$ erhält man den kleinsten benetzten Rand

$\underline{U = 2\sqrt{F}\sqrt[4]{3}}$.

23. Durch $z = f(x,y) = x + y$ wird eine Ebene dargestellt, die vom Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ geschnitten wird. Es sind die Extremwerte der Schnittkurve gesucht.

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 1 + 2x\lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{2x} \\ F_y &= 1 + 2y\lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{2y} \end{aligned}\right\} x = y$$

$x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad 2x^2 = 4, \quad x^2 = 2$

$x_1 = \sqrt{2}, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad z_1 = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{2}, \quad y_2 = -\sqrt{2}, \quad z_2 = -2\sqrt{2}$

Der höchste Punkt der Schnittkurve liegt bei $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$, $z_1 = 2\sqrt{2}$ und der tiefste Punkt bei $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $z_2 = -2\sqrt{2}$.

24. Die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ stellt das Volumen eines Quaders dar. Die Funktionswerte liegen gleichzeitig auf der Einheitskugel

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$

$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$F_x = yz + 2\lambda x, \quad F_x = 0, \quad \lambda = -\frac{yz}{2x}$

$x^2 = y^2, x = \pm y$

$F_y = xz + 2\lambda y, \quad F_y = 0, \quad \lambda = -\frac{xz}{2y}$

$y^2 = z^2, \quad y = \pm z$

$F_z = xy + 2\lambda z, \quad F_z = 0, \quad \lambda = -\frac{xy}{2z}$

Weil wir nur positive x, y, z vorausgesetzt haben, berücksichtigen wir nur $x = y = z$. Dann folgt aus

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$3x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{3}.$

Folglich erhält man für $\underline{x = \frac{\sqrt{3}}{3}}$, $\underline{y = \frac{\sqrt{3}}{3}}$, $\underline{z = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ den maximalen Funktionswert

$$f_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{9}}.$$

25. Wir zeigen, daß das Produkt $u = xyzt$ unter der Nebenbedingung $x + y + z + t = 4c$ am größten ist, wenn alle Faktoren gleich sind:

$F(x, y, z, t, \lambda) = u(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) = xyzt + \lambda(x + y + z + t - 4c)$

$$\left.\begin{array}{ll} F_x = yzt + \lambda & F_x = 0\colon \lambda = -yzt \\ F_y = xzt + \lambda & F_y = 0\colon \lambda = -xzt \\ F_z = xyt + \lambda & F_z = 0\colon \lambda = -xyt \\ F_t = xyz + \lambda & F_t = 0\colon \lambda = -xyz \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = y \\ y = z \\ z = t \end{array}$$

$x + y + z + t - 4c = 0; \; x = y = z = t\colon \quad \underline{x = y = z = t = c}$

$\underline{u_{\max} = c^4}$

1. Die Funktionaldeterminante hat die Form:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

2. Das Produkt aus der Funktionaldeterminante eines Funktionensystems und der Funktionaldeterminante des Umkehrsystems ist gleich Eins:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1$$

3. Die Funktionaldeterminanten der Polarkoordinaten und der Zylinderkoordinaten haben den Wert

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r \quad \text{und} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

4. Wenn durch die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$$

eine oder mehrere Funktionen gegeben sind, so spricht man von einer impliziten Darstellung.

5. Wenn die Funktion $F(x, y)$ im Rechteck $R = (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x; y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y)$ definiert und stetig ist, dort die partiellen Ableitungen F_x und F_y existieren und stetig sind, $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ist, so kann man y als eindeutige Funktion $y = f(x)$ im Rechteck R darstellen.

6. Es gilt $y' = -\frac{F_x}{F_y}$.

7. Die Taylorsche Formel lautet:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0,)\,k] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0, y_0)\,h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)\,hk + f_{yy}(x_0, y_0)\,k^2] +$$
$$+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(x_0, y_0)\,h^3 + 3 f_{xxy}(x_0, y_0)\,h^2 k +$$
$$+ 3 f_{xyy}(x_0, y_0)\,hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)\,k^3] + R_3$$

8. Die MACLAURINsche Formel lautet:

$$f(x, y) = f(0; 0) + \frac{1}{1!}[f_x(0; 0)\,x + f_y(0; 0)\,y] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(0; 0)\,x^2 + 2f_{xy}(0; 0)\,xy + f_{yy}(0; 0)\,y^2] +$$

$$+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(0; 0)\,x^3 + 3f_{xxy}(0; 0)\,x^2y + 3f_{xyy}(0; 0)\,xy^2 +$$

$$+ f_{yyy}(0; 0)\,y^3] + R_3$$

9. In das $(n+1)$-te Glied der Formel setzt man für die Stelle (x_0, y_0) eine Zwischenstelle $(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$ für $0 < \vartheta < 1$ ein.

10. Für das Auftreten von Extremwerten ist notwendig, daß die partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden:

$$z_x = 0 \quad \text{und} \quad z_y = 0$$

Geometrisch bedeutet das, daß die Tangentialebene horizontal liegt.

11. Falls die Diskriminante

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)\,f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

für eine Stelle (x_0, y_0) positiv wird, liegt dort sicher ein Extremum vor, falls sie negativ wird, liegt dort sicher kein Extremum.

12. Liegt an einer Stelle (x_0, y_0) ein Extremum vor und gilt dort $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (oder $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$), so handelt es sich um ein Minimum, gilt $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (oder $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$), so handelt es sich um ein Maximum.

13. Für das Auftreten von Extremwerten ist notwendig, daß alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

14. Sucht man von einer Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Extremwerte, wobei die Veränderlichen gleichzeitig die Bedingungen

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$ erfüllen sollen, so spricht man von einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen.

15. Hat man die Extremwerte einer Funktion

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zu bestimmen, wobei noch die Nebenbedingungen

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

erfüllt sein müssen, so löst man das Problem mit Hilfe der LAGRANGEschen *Multiplikatorenmethode*. Dabei setzt man eine Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \\ + \lambda_k g_k(x_1, \ldots, x_n)$$

an und löst die Extremwertaufgabe für die Funktion $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ nach dem üblichen Verfahren.

Redaktionsschluß: 1980

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Zentralstelle für Lehr- und Organisationsmittel des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen, Zwickau
Ag 628/264/88/DDR/1200 - ZLO 761/88

2. Ausgabe 4. Auflage
Bestell-Nr. 02 0002 13 1

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.
Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.